جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
قطاع الكتب

الرياضيات البحتة

الجبر والهندسة الفراغية

الصف الثالث الثانوى

كتاب الطالب

طبعة ٢٠١٦ - ٢٠١٧م

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم

جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
قطاع الكتب

الرياضيات البحتة

الجبر والهندسة الفراغية

الصف الثالث الثانوى كتاب الطالب

طبعة ٢٠١٦ - ٢٠١٧م

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم

الاســـم : ....

الفـصل : ....

المدرسـة : ....

إعداد

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ محمد حسين فهمى

أ / أسامة جابر عبد الحافظ

أ/ إبراهيم عبد اللطيف الصغير

الطبعــة الأولى ٢٠١٦/ ٢٠١٧

رقم الإيــداع ٨٧٠٥/ ٢٠١٦

الرقم الدولى 2 - 033 - 706 - 977 - 978

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

٣ تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ يتضمن الكتاب: الجبر والهندسة الفراغية، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى يقيس بعض المهارات الازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهي الكتاب بإختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسى.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.
والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

أولاً: الجـــــبـــر

الوحدة الأولى: التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

١ - ١ مبدأ العد – التباديل – التوافيق ٤
١ - ٢ نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب ١٣
١ - ٣ إيجاد الحد المشتمل على س ك من مفكوك ذات الحدين ٢٢
١ - ٤ النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين ٢٧
ملخص الوحدة ٣٠
تمارين عامة ٣١
اختبار تراكمى ٣٥

الوحدة الثانية: الأعداد المركبة

٢ - ١ الصورة المثلثية للعدد المركب ٣٨
٢ - ٢ نظرية ديموافر ٥٠
٢ - ٣ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ٥٥
تمارين عامة ٥٩
ملخص الوحدة ٦١
اختبار تراكمى ٦٣

الوحدة الثالثة: المحددات والمصفوفات

٣ - ١ المحددات ٦٦
٣ - ٢ المصفوفات ٧٩
٣ - ٤ حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة ٨٦
ملخص الوحدة ٩٧
تمارين عامة ٩٩
اختبار تراكمى ١٠٢

المحتويات

ثانياً: الهندسة الفراغية

الوحدة الأولى: الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

١ - ١ النظام الإحداثي المتعامد في ثلاث أبعاد ١٠٦

١ - ٢ المتجهات في الفراغ ١١٤

١ - ٣ ضرب المتجهات ١٢٣

ملخص الوحدة ١٣٨

تمارين عامة ١٤٤

اختبار تراكمى ١٤٦

الوحدة الثانية: الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ

٢ - ١ معادلة المستقيم فى الفراغ ١٥٠

٢ - ٢ معادلة المستوى فى الفراغ ١٦٠

ملخص الوحدة ١٧١

تمارين عامة ١٧٣

اختبار تراكمى ١٧٤

اختبارات عامة وإجابات

اختبارات عامة ١٧٦

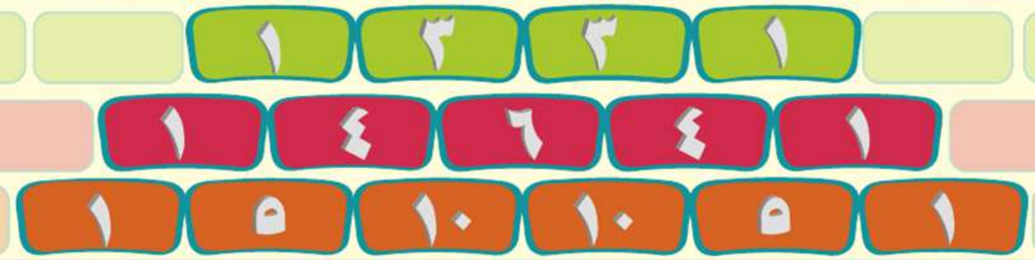
أجوبة بعض التمارين ١٩٧

أولًا: الجـــبـر

الوحدة الأولى

التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

Permutation , combination and Binomial theorem



مقدمة الوحدة

وُلِد نصر الدين الطوسى (١٢٠١م – ١٢٧٤م) بجهرود، قُرب طوس الواقعة فى إيران، من أسرة علم وفلسفة، تتلمذ على يدى كمال الدين الموصلى ومعين الدين المصرى، فدرس عليهما الحكمة والفلسفة وعلم الفلك والرياضيات، له باع طويل فى حساب عدد الإمكانات لحدوث الظواهر المختلفة، كما استخدم التباديل والتوافيق، وكان لكاردن (١٥٠١م –١٥٧٦م) اهتمامات فى حساب عدد الإمكانات بطريقة مبدأ العد الأساسى، مما أتاح له مجالاً كبيرًا فى معمارية الحاسوب (Computer Architecture) وهى عبارة عن تصميم وبنية العمليات الوظيفية للحاسوب، وتتناول هذه الوحدة مبدأ العد والعلاقة بين التباديل والتوافيق واستخداماتها فى حل بعض المشكلات الرياضية، وتعرف على نظرية ذات الحدين، وحل بعض التطبيقات الرياضية والحياتية عليها.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذه الوحدة، وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مبدأ العد (قاعدة الجمع)
- يتعرف العلاقة بين التباديل والتوافيق كأساليب وطرق العد.
- يستنتج قوانين ونتائج على التباديل والتوافيق.
- يستخدم التباديل والتوافيق فى حل مشكلات رياضية حياتية فى مجالات مختلفة
- يتعرف نظرية ذى الحدين بأس صحيح موجب.
- يستنتج الحد العام فى مفكوك ذى الحدين.
- يستنتج النسبة بين كل حد والحد السابق له فى مفكوك ذى الحدين.
- يوجد معامل أى حد فى مكفوك ذى الحدين وفقًا لرتبة هذا الحد.
- يوجد معامل أى قوة للمتغير س فى مفكوك (س+ص) ن
- يوجد الحد الخالى من س فى مفكوك (س + ص) ن
- يوجد معامل أكبر حد فى مفكوك ذى الحدين
- يوجد الحد الأوسط فى مفكوك ذى الحدين عندما ن عدد زوجى والحدان الأوسطان عندما ن عدد فردى.
- يستنتج علاقات بين التوافيق مستخدمًا مفكوك ذى الحدين
- يستنتج العلاقة بين مثلث باسكال ومعاملات مفكوك ذى الحدين، ويستنتج بعض الأنماط فى مثلث باسكال.
- يحل تطبيقات رياضية وحياتية متنوعة على نظرية ذى الحدين.

مصطلحات أساسية

- مبدأ العد *Fundamental counting principle*
- التباديل *Permutations*
- التوافيق *Combinations*
- نظرية ذات الحدين *Binomial Theorem*

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): مبدأ العد - التباديل - التوافيق

الدرس (١ - ٢): نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

الدرس (١ - ٣): إيجاد الحد المشتمل على سك من مفكوك ذات الحدين

الدرس (١ - ٤): النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

مخطط تنظيمي للوحدة

الوحدة الأولى

١ - ١ مبدأ العد - التباديل - التوافيق

Fundamental counting principle permutations combinations

سوف تتعلم

- مبدأ العد (قاعدة الجمع)
- مزيد من العلاقات بين التباديل والتوافيق .
- تطبيقات على استخدام التباديل والتوافيق فى الحياة العامة.

مصطلحات أساسية

- التباديل Permutations
- التوافيق Combinations
- مبدأ العد Counting prenciple

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة متقدمة

تمهيد

أولًا : مبدأ العد: *Multiplication rule*

سبق أن درست مبدأ العد (قاعدة الضرب) والتى تنص على:

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما ن طريقة، وعدد طرق إجراء عمل آخر م طريقة، فإن عدد طرق إجراء العمل الأول والعمل الثانى يساوى (م × ن) طريقة.

فكر و ناقش

كم عددًا يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من عناصر المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥} حيث إن العدد مكون من ثلاثة أرقام (٣ منازل)؟

عدد طرق تكوين رقم الآحاد = ٥

عدد طرق تكوين رقم العشرات = ٤

عدد طرق تكوين رقم المئات = ٣

وبالتالى عدد طرق تكوين عدد مكون من ثلاثة أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام المعطاة = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

والآن فكر: كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام (يسمح بالتكرار) من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ؟

تعلم

مبدأ العد (قاعدة الجمع) *Addition rule*

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما ن طريقة ، وعدد طرق إجراء عمل آخر م طريقة، فإن عدد طرق إجراء العمل الأول أو العمل الثانى يساوى (م + ن) طريقة.

مثال

(١) فصل مختلط من الجنسين به ٩ أولاد ، ٦ بنات، يُراد تكوين فريق مكون من ٤ أفراد من هذا الفصل بحيث يكون الفريق من نفس الجنس.

الحل

(أ) عدد طرق تكوين الفريق إذا كان أعضاؤه أولادًا فقط = $^{٩}ق_{٤}$ = ١٢٦

(ب) عدد طرق تكوين الفريق إذا كان أعضاؤه بنات فقط = $^{٦}ق_{٤}$ = ١٥

عدد طرق تكوين الفريق إذا كان أعضاؤه من نفس الجنس = $^{٩}ق_{٤} + {}^{٦}ق_{٤}$ = ١٢٦ + ١٥ = ١٤١

حاول أن تحل

(١) اختير ٣ أشخاص معًا من مجموعة مكونة من ٥ رجال ، ٤ نساء أوجد: كم طريقة يمكن بها اختيار الأشخاص الثلاثة فى كل من الحالات الآتية:

(أ) إذا كان الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس؟

(ب) إذا كان الأشخاص الثلاثة فيهم اثنان فقط من نفس الجنس؟

مثال

(٢) تحتوى ورقة امتحان على ٨ أسئلة، وعلى الطالب أن يجيب عن ٦ منها، بشرط أن تتضمن سؤالين على الأقل من الأربعة الأولى ، فكم طريقة يمكن بها للطالب اختيار الأسئلة التى يجيب عنها؟

الحل

(أ) يمكن للطالب أن يختار سؤالين من الأربعة الأولى وأربعة أسئلة من باقى الورقة بطرق عددها $^{٤}ق_{٢} \times {}^{٤}ق_{٤}$ = ٦

(ب) يمكن للطالب أن يختار ٣ أسئلة من الأربعة الأولى وثلاثة من باقى الورقة بطرق عددها $^{٤}ق_{٣} \times {}^{٤}ق_{٣}$ = ١٦

(جـ) يمكن للطالب أن يختار ٤ أسئلة من الأربعة الأولى وسؤالين من باقى الورقة بطرق عددها $^{٤}ق_{٤} \times {}^{٤}ق_{٢}$ = ٦

عدد طرق اختيار الأسئلة = $^{٤}ق_{٢} \times {}^{٤}ق_{٤} + {}^{٤}ق_{٣} \times {}^{٤}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٤} \times {}^{٤}ق_{٢}$ = ٦ + ١٦ + ٦ = ٢٨

حاول أن تحل

(٢) يدرس الطالب فى السنة الأولى بإحدى الكليات الجامعية ٨ مواد دراسية، ولا يحق له الانتقال إلى السنة الثانية إلا إذا نجح فى ٦ منها على الأقل، فكم طريقة يمكن بها للطالب أن ينتقل للسنة الثانية؟

عدد طرق اختيار عينة مع الإحلال أو بدون إحلال

عند اختيار ر من الأشياء من بين ن من الأشياء فإننا نراعى الحالات الآتية:

١ - إذا كان الاختيار مع الإحلال والترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $ن^{ر}$

- عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين من مجموعة الأرقام { ١، ٢، ٣، ٤، ٥} يساوى $٥^{٢}$ = ٢٥

٢ - إذا كان الاختيار مع الإحلال وبدون ترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $^{ن+ر-١}ق_{ر}$

- عدد طرق توزيع ٣ كرات متماثلة على ٤ صناديق يساوى = $^{٤+٣-١}ق_{٣} = {}^{٦}ق_{٣}$ = ٢٠

٣ - إذا كان الاختيار بدون إحلال مع مراعاة الترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $^{ن}ل_{ر}$

- عدد طرق وقوف ٤ سيارات فى ساحة انتظار به ١٠ أماكن يساوى $^{١٠}ل_{٤}$ = ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ = ٥٠٤٠

٤ - إذا كان الاختيار بدون إحلال دون مراعاة الترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $^{ن}ق_{ر}$

- عدد طرق اختيار فريق من ٥ أشخاص من بين ١٢ شخصًا يساوى $^{١٢}ق_{٥}$ = ٧٩٢

مثال

(٣) حقيبة بها ١٢ كرة حمراء ، ٨ كرات بيضاء ، أوجد عدد طرق سحب ٣ كرات حمراء و ٢ كرة بيضاء فى كل من الحالات الآتية:

(أ) إذا كان السحب مع الاحلال والترتيب. (ب) إذا كان السحب بدون إحلال مع الترتيب.

(جـ) إذا كان السحب بدون إحلال ودون ترتيب.

الحل

(أ) عدد طرق السحب = $١٢^٣ \times ٨^٢$ = ١١٠٥٩٢ (ب) عدد طرق السحب = $^{١٢}ل_٣ \times {}^{٨}ل_٢$ = ٧٣٩٢٠

(جـ) عدد طرق السحب = $^{١٢}ق_٣ \times {}^{٨}ق_٢$ = ٦١٦٠

حاول أن تحل

(٣) فى المثال السابق أوجد عدد طرق سحب ٥ كرات من نفس اللون في كل من الحالات السابقة.

تفكير ناقد: أوجد عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة فى ساحة انتظار بها ١٠ أماكن وقوف.

(أ) إذا كان الموقف على شكل دائرة . (ب) إذا كان الموقف على شكل صف.

ثانيًا: التباديل:

سبق أن درست مفهوم التباديل وعلمت أن التباديل هى كل ترتيب يمكن الحصول عليه من عدة اشياء بأخذها كلها أو بعضها. كما درست العلاقات الآتية :

١) $^{ن}ل_{ر}$ = ن(ن - ١) (ن - ٢) × .... × (ن - ر + ١)

لكل ن ≥ ر ، ن ∈ ص$^+$ ، ر ∈ ط

٢) $^{ن}ل_{ن}$ = |ن = ن(ن - ١) (ن - ٢) × .... × ٣ × ٢ × ١

٣) $^{ن}ل_{ر} = \frac{|ن}{|ن - ر}$ لكل ن ≥ ر ، ن ∈ ط ، ر ∈ ط

٤) |ن = ن |ن - ١ = ن (ن - ١) |ن - ٢ = ...

هل تعلم؟

$^{ن}ل_{ر}$ ∈ ص$^+$

|ن ∈ ص$^+$

|٠ = |١ = ١

$^{ن}ل_{٠}$ = ١

$^{ن}ل_{١}$ = ن

مثال

(٤) أوجد قيمة ن فى كل مما يأتي:

(أ) $^{٣ن - ٥}ل_{٥}$ = ٢٥٢٠ (ب) |ن + ٢ = ٩٠ |ن

الحل

(أ) ∵ $^{٣ن - ٥}ل_{٥}$ = ٢٥٢٠ ∵ $^{٧}ل_{٥}$ = ٢٥٢٠

∴ $^{٣ن - ٥}ل_{٥} = {}^{٧}ل_{٥}$ ∴ ٣ن - ٥ = ٧

∴ ن = ٤

(ب) ∵ |ن + ٢ = ٩٠ |ن ∴ $\frac{|ن + ٢}{|ن}$ = ٩٠

∴ $^{ن+٢}ل_{٢} = {}^{١٠}ل_{٢}$ ∴ ن + ٢ = ١٠

∴ ن = ٨

حاول أن تحل

(٤) أوجد قيمة ر فى كل مما يأتي: (أ) $^{٨}ل_{ر - ١}$ = ٦٧٢٠ (ب) $^{٩}ل_{ر - ٤}$ = |٩

مثال

⑤ إذا كان $^{٨}ل_{ن-٣} = {}^{٨}ل_{ن-٣}$ فأوجد قيمة ن

الحل

$\because {}^{٨}ل_{ن-٣} = {}^{٨}ل_{ن-٣}$ $\therefore ٨ \geqslant ن - ٣ \geqslant ٠$ $\therefore ١١ \geqslant ن \geqslant ٣$ $\therefore ن \in \{٣، ٤، ٥، ٦، ...، ١٠، ١١\}$

حاول أن تحل

⑤ إذا كان $^{ن-٤}ل_{٩} = {}^{ن-٤}ل_{٩}$ فأوجد قيمة ن

مثال

⑥ أوجد قيمة ن إذا كان $^{٥٦}ل_{ر+٦} : {}^{٥٤}ل_{ر+٣} = ٣٠٨٠٠ : ١$

الحل

$\because {}^{٥٦}ل_{ر+٦} : {}^{٥٤}ل_{ر+٣} = ٣٠٨٠٠ : ١$ $\therefore \frac{\lfloor ٥٦}{\lfloor ٥٠ - ر} \times \frac{\lfloor ٥١ - ر}{\lfloor ٥٤} = ٣٠٨٠٠$

$\therefore ٥٦ \times ٥٥ \, (٥١ - ر) = ٣٠٨٠٠$ $\therefore ٥١ - ر = ١٠$ $\therefore ر = ٤١$

حاول أن تحل

⑥ إذا كان $^{٢ن+١}ل_{ن-١} : {}^{٢ن-١}ل_{ن} = ٣ : ٥$ فأوجد قيمة ن.

مثال

⑦ إذا كان $^{ن-٢}ل_{ر-٢} : {}^{ن-٢}ل_{ر} = ١ : ٤٢$ ، $^{٧}ل_{ر-٣} = ٨٤٠$ فما قيمة كل من ن، ر؟

الحل

$\because {}^{٧}ل_{ر-٣} = ٨٤٠$ ، $\because {}^{٧}ل_{٤} = ٨٤٠$

$\therefore {}^{٧}ل_{ر-٣} = {}^{٧}ل_{٤}$ $\therefore ر - ٣ = ٤$ $\therefore ر = ٧$

$^{ن-٢}ل_{٥} : {}^{ن-٢}ل_{٧} = ١ : ٤٢$ $\therefore \frac{\lfloor ن - ٢}{\lfloor ن - ٧} \times \frac{\lfloor ن - ٩}{\lfloor ن - ٢} = \frac{١}{٤٢}$

$(ن - ٧)(ن - ٨) = ٤٢$ $^{ن-٧}ل_{٢} = {}^{٧}ل_{٢}$ $\therefore ن - ٧ = ٧$ $ن = ١٤$

حاول أن تحل

⑦ أوجد قيمة كل من ن، ر في كل مما يأتي:

أ) $^{ن-ر}ل_{٢} = ٩٠$ ، $^{ن+ر}ل_{٢} = ٣٨٠$

ب) $^{ن}ل_{ر} = ٦٠٤٨٠$ ، $\lfloor ر = ٧٢٠$

مثال

⑧ إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠$ فأوجد قيم ن، ر الممكنة

الحل

أولاً: $^{ن}ل_{ر} = ٦ \times ٥ \times ٤ = {}^{٦}ل_{٣}$ $\therefore ن = ٦$ عندما $ر = ٣$

ثانيًا: $^{ن}ل_{ر} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ = {}^{٥}ل_{٤}$ $\therefore ن = ٥$ عندما $ر = ٤$

ثالثًا: $^{ن}ل_{ر} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = {}^{٥}ل_{٥}$ ∴ ن = ٥ عندما ر = ٥

رابعًا: $^{ن}ل_{ر} = {}^{١٢٠}ل_{١}$ ∴ ن = ١٢٠ عندما ر = ١

حاول أن تحل

(٨) إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ٢١٠$ فأوجد قيم كل من ن، ر الممكنة

ثالثًا: التوافيق :

سبق أن درست مفهوم التوافيق وعلمت أن التوافيق هى كل مجموعة يمكن الحصول عليها من عدة اشياء بأخذها كلها أو بعضها. كما درست العلاقات الآتية :

١) $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$ لكل ن ⩾ ر ، ن ∈ ص$^{+}$ ، ر ∈ ط

٢) $^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}}$ لكل ن ⩾ ر ، ن ∈ ط ، ر ∈ ط

٣) $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن - ر}$ **(٤)** إذا كان $^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن س = ص أو س + ص = ن

لاحظ أن

$^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$

$^{ن}ق_{ر} \leqslant {}^{ن}ل_{ر}$

$^{ن}ق_{ر} \in$ ص$^{+}$

مثال

(٩) أوجد قيمة ن فى كل مما يأتى: (أ) $^{ن}ق_{ن-٣} = ١٢٠$ (ب) $^{٢٥}ق_{٣ن-٥} = {}^{٢٥}ق_{٢ن}$

الحل

(أ) ∵ $^{ن}ق_{ن-٣} = ١٢٠$ ∴ $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ ∵ $١٢٠ = {}^{١٠}ق_{٣}$

∴ $^{ن}ق_{٣} = {}^{١٠}ق_{٣}$ ∴ ن = ١٠

(ب) ∵ $^{٢٥}ق_{٣ن-٥} = {}^{٢٥}ق_{٢ن}$

أولاً: ٣ ن - ٥ = ٢ ن **ثانيًا:** ٣ ن - ٥ + ٢ ن = ٢٥

∴ ن = ٥ (تحقق) ٥ ن = ٣٠ ∴ ن = ٦ تحقق

حاول أن تحل

(٩) أوجد قيمة ن فى كل مما يأتى: (أ) $^{ن+١}ق_{ن-١} = ٦٦$ (ب) $^{٢٥}ق_{٢ن-١٤} = {}^{٢٥}ق_{ن-١}$

قانون النسبة *Ratio rule*

$$\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$$

لاحظ أن

(١) $\frac{^{٢٧}ق_{١٤}}{^{٢٧}ق_{١٣}} = \frac{٢٧ - ١٣}{١٤} = ١$

(٢) $\frac{^{٣٦}ق_{٢٥}}{^{٣٦}ق_{٢٣}} = \frac{^{٣٦}ق_{٢٥}}{^{٣٦}ق_{٢٤}} \times \frac{^{٣٦}ق_{٢٤}}{^{٣٦}ق_{٢٣}}$

ويمكن إثبات العلاقة السابقة كالآتى:

الطرف الأيمن : $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}} \div \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر - ١}\ \underline{|ن - ر + ١}}$

$$= \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}} \times \frac{\underline{|ر - ١}\ \underline{|ن - ر + ١}}{\underline{|ن}}$$

$$= \frac{١}{ر\ \underline{|ر - ١}\ \underline{|ن - ر}} \times \frac{\underline{|ر - ١}\ (ن - ر + ١)\ \underline{|ن - ر}}{١} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$$

مثال

(١٠) إذا كان $^{ن}ق_{٦} : {}^{ن}ق_{٥} = \frac{١}{٣}$ أوجد قيمة $\underline{|ن-٢}$

الحل

$\because \frac{^{ن}ق_{٦}}{^{ن}ق_{٥}} = \frac{١}{٣}$ $\therefore \frac{ن-٦+١}{٦} = \frac{١}{٣}$ $\therefore \frac{ن-٥}{٦} = \frac{١}{٣}$ $\therefore ن = ٧$

$\therefore \underline{|ن-٢} = \underline{|٧-٢} = \underline{|٥} = ١٢٠$

حاول أن تحل

(١٠) احسب قيمة ر إذا كان: $^{٧}ق_{ر} : {}^{٧}ق_{ر-١} = \frac{١}{٣}$

قانون الجمع (٢) $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

ويمكن إثبات ذلك على النحو الآتي:

الطرف الأيمن = $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}} + \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر-١}\ \underline{|ن-ر+١}} = \frac{(ن-ر+١)\underline{|ن} + ر\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر+١}} = \frac{(ن-ر+١+ر)\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر+١}}$

$= \frac{(ن+١)\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن+١-ر}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ر}\ \underline{|(ن+١)-ر}} = {}^{ن+١}ق_{ر}$ = الطرف الأيسر

مثال

(١١) إذا كان $^{ن+١}ل_{ر+١} : {}^{ن+١}ق_{ر+١} = ٧٢٠ : ١$ ، $^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-٣} = ٥٦$ أوجد القيمة العددية لكل من ن، ر.

الحل

$^{ن+١}ل_{ر+١} : {}^{ن+١}ق_{ر+١} = ٧٢٠ : ١$

$\underline{|ر+١} = ٧٢٠$ $\underline{|ر+١} = \underline{|٦}$ $\therefore ر = ٥$

$\because {}^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-٣} = ٥٦$ $\therefore {}^{ن}ق_{٣} + {}^{ن}ق_{٢} = ٥٦$ $\therefore {}^{ن+١}ق_{٣} = ٥٦$

$\therefore {}^{ن+١}ق_{٣} = {}^{٨}ق_{٣}$ $\therefore ن+١ = ٨$ $\therefore ن = ٧$

حاول أن تحل

(١١) إذا كان $^{١٣}ق_{ر} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$ ، $^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$ **أوجد** كلًا من ن ، ر

مثال

(١٢) أثبت أن $^{ن}ق_{ر} + ٢\ {}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+٢} = {}^{ن+٢}ق_{ر+٢}$ ومن ذلك أوجد قيمة: $^{١٠}ق_{٥} + ٢\ {}^{١٠}ق_{٦} + {}^{١٠}ق_{٧}$

الحل

الطرف الأيمن = $\underbrace{^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}} + \underbrace{^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+٢}}$

$= {}^{ن+١}ق_{ر+١} + {}^{ن+١}ق_{ر+٢} = {}^{ن+٢}ق_{ر+٢}$ = الطرف الأيسر

المقدار = $^{١٠}ق_{٥} + ٢\ {}^{١٠}ق_{٦} + {}^{١٠}ق_{٧}$ بوضع ن = ١٠ ، ر = ٥

ومن العلاقة السابقة فإن: $^{١٠}ق_{٥} + ٢\ {}^{١٠}ق_{٥+١} + {}^{١٠}ق_{٥+٢} = {}^{١٠+٢}ق_{٥+٢} = {}^{١٢}ق_{٧} = ٧٩٢$

حاول أن تحل

(١٢) (أ) **أوجد قيمة:** ن التي تحقق $^{ن}ق_٣ + ٢\,^{ن}ق_٢ + ^{ن}ق_١ = ١٢٠$ (ب) **أوجد قيمة:** $\frac{^{١٧}ق_٦ + ^{١٧}ق_٥}{^{١٨}ق_٥}$

تفكير ناقد: أثبت أن $^{ن}ق_ر : ^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ ومن ذلك أثبت أن $\frac{^{٢٥}ق_٤ + ^{٢٤}ق_٣}{^{٢٤}ق_٣ + ^{٢٣}ق_٢} = \frac{٥٨}{٩}$

مثال

(١٣) إذا كان $^{ن}ق_{ر+٢} \times ^{ن}ق_ر \geqslant ^{ن}ق_{ر+١} \times ^{ن}ق_{ر-١}$ فاثبت أن: $ن \geqslant ٢ر + ١$

الحل

$\because\ ^{ن}ق_{ر+٢} \times ^{ن}ق_ر \geqslant ^{ن}ق_{ر+١} \times ^{ن}ق_{ر-١}$

$\therefore \frac{^{ن}ق_{ر+٢}}{^{ن}ق_{ر+١}} \times \frac{^{ن}ق_ر}{^{ن}ق_{ر-١}} \geqslant ١ \Longrightarrow \frac{ن-(ر+١)+١}{ر+٢} \times \frac{ن-(ر+١)}{ر} \geqslant ١$

$\frac{ن-ر-١}{ر+٢} \times \frac{ن-ر+١}{ر} \geqslant ١ \Longrightarrow (ن-ر)^٢ - ١ \geqslant ر(ر+٢)$

$(ن-ر)^٢ \geqslant (ر+١)^٢ \Longrightarrow ن-ر \geqslant ر+١ \qquad \therefore ن \geqslant ٢ر + ١$

حاول أن تحل

(١٣) أوجد قيم ن المكنة إذا كان: $^{ن}ق_٨ \times ^{ن}ق_٦ \geqslant ^{ن}ق_٧ \times ^{ن}ق_٥$

تمارين (١ - ١)

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات المعطاة:

(١) عدد طرق اختيار حرفين مختلفين معًا أو ثلاثة أحرف مختلفة معًا من عناصر المجموعة {أ، ب، جـ، ى هـ، و} هى:
(أ) $^٦ق_٢ \times ^٦ق_٣$ (ب) $^٦ل_٢ \times ^٦ل_٣$ (جـ) $^٦ق_٢ + ^٦ق_٣$ (د) $^٦ل_٢ + ^٦ل_٣$

(٢) إذا كان $^{ن}ق_٥ : ^{ن}ق_٤ = ٣ : ١$ فإن ن تساوى:
(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١٧ (د) ١٩

(٣) اشترك ١٢ لاعبًا فى مسابقة للسباحة، كم طريقة يمكن بها ترتيب المركز الأول والثانى والثالث؟
(أ) ١٢٣٠ (ب) ١٣٢٠ (جـ) ٢٣١٠ (د) ٣٢١٠

(٤) أى القيم الآتية يمكن أن تساويها $^{ن}ل_٢$؟
(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٧ (د) ٣٠

(٥) إذا كان $^{١٧}ل_{م+٥} = ^{٢٩}ل_{م+٥}$ فإن م تساوى:
(أ) -٥ (ب) ٠ (جـ) ٥ (د) ١٢

(٦) إذا كان $^{ن-٣}ل_٧ = \underline{|٨}$ فإنها تساوى:
(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٥

(٧) قيمة $^{٥٠}ق_٤ + \sum_{ر=١}^{٦} {}^{٥٦-ر}ق_٣$ تساوى:
(أ) $^{٥٦}ق_٤$ (ب) $^{٥٦}ق_٣$ (جـ) $^{٥٥}ق_٤$ (د) $^{٥٥}ق_٣$

(٨) يجب على طالب أن يجيب عن ١٠ أسئلة من ١٣ سؤالًا بشرط أن يجيب عن ٤ أسئلة على الأقل من الأسئلة الخمس الأولى، كم طريقة يمكن بها أن يجيب الطالب؟

(أ) ١٤٠ (ب) ١٩٦ (جـ) ٢٨٠ (د) ٣٤٦

(٩) إذا كان $^{ن+2}ق_{4} = ن^{2} - 1$ فإن ن تساوى:

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٠

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٠) كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجى وعددين فردين من ٤ أعداد زوجية ، ٥ أعداد فردية.

(١١) كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجى أو عددين فردين من ٤ أعداد زوجية ، ٥ أعداد فردية.

(١٢) كم طريقة يمكن بها توزيع ٨ جوائز بالتساوى على ٤ طلاب.

(١٣) كم عددًا مكونًا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١ ، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}؟

(أ) مع الإحلال (ب) بدون إحلال

(١٤) إذا كانت سـ = { ٢، ٣، ٤، ٥} وبفرض عدم السماح بتكرار الرقم أوجد عدد كل من الأعداد الآتية المكونة من عناصر سـ.

(أ) إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام بالضبط. (ب) إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام على الأقل.

(جـ) إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام على الأكثر.

(١٥) أوجد قيمة كل من ن، ر فى كل مما يأتى:

(أ) $^{ن}ل_{2} = 2$ ، $^{ن+ر}ل_{2} = 90$ (ب) $^{ن}ل_{4} = 840$ ، $^{8}ل_{ر} = 336$

(جـ) $^{ن}ق_{2} = 21$ ، $^{ن+ر}ل_{3} = 990$ (د) $^{ن}ق_{ر} = 10$ ، $\underline{|ن-ر} = 6$

(١٦) إذا كان $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-1} = 2 : 3$ ، $^{ن}ق_{ر-2} : {}^{ن}ق_{ر-1} = 4 : 3$ أوجد القيمة العددية لكل من ن، ر.

(١٧) أثبت أن $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+1}} = \frac{ر+1}{ن+1}$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة $\frac{^{15}ق_{6} + {}^{15}ق_{7}}{^{15}ق_{6}}$.

(١٨) أثبت أن $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-1}ق_{ر} = \frac{ن}{ن-ر}$ ثم استخدم ذلك فى حل المعادلة $\frac{^{ن}ق_{8} + {}^{ن-1}ق_{8}}{^{ن-1}ق_{8}} = 3$

(١٩) إذا كان $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر-1}$ ، $^{ن+1}ق_{ر} = \frac{40}{\underline{|ر}} \times {}^{ن}ل_{ر-2}$ أوجد قيمة كل من ن ، ر

(٢٠) إذا كان $^{ن}ل_{ر} = 120\,{}^{ن}ق_{ن-ر}$ فاحسب قيمة $^{12}ق_{2ر}$ ثم أوجد أقل قيمة للمتغير ن والتى تجعل العلاقة صحيحة .

(٢١) أوجد قيمة كل من ن، ر إذا كان $^{ن}ق_{ر-1} : {}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+1} = 1 : 5 : 15$

(٢٢) أثبت أن $^{ن+1}ق_{ر+1} \div {}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن+1}{ر+1}$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة $\frac{^{15}ق_{5} + {}^{14}ق_{4}}{^{14}ق_{4} + {}^{13}ق_{3}}$

(٢٣) إذا كان $\frac{^{13}ق_{ر} + {}^{13}ق_{ر+1}}{^{13}ق_{ر-1} + {}^{13}ق_{ر}} = 2$ فأوجد قيمة ر

(٢٤) إذا كان $^{30}ل_{س} = {}^{30}ل_{س+2ص}$ فما قيمة كل من س ، ص؟

(٢٥) إذا كان $^{ن}ل_{8} \leqslant {}^{ن}ل_{7}$ فما قيمة ن؟

(٢٦) إذا كان: $\underline{|م+ن} = 380\,\underline{|م+ن-2}$ فأوجد قيمة م + ن

(٢٧) حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $|\underline{ن+٢} \; |\underline{٣ن-٤} = |\underline{ن} \; |\underline{٣ن-٢}$

ب) $٢ \, |\underline{٢ن} = (ن^{٢} + ٣ن + ٢)\,(|\underline{ن})^{٢}$

ج) $|\underline{٢ن} \; |\underline{ن-٣} = ٧٢ \, |\underline{٣ن-٧}$

(٢٨) أثبت أن $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة كل من ن، ر

إذا كان $^{ن+٢}ق_{ر+١} = ٩ \; {}^{ن+١}ق_{ر} = ٩٠ \times {}^{ن}ق_{ر-١}$

(٢٩) **الارتباط بالمتتابعات :**

أ) إذا كان $٤ \times {}^{ن}ق_{٥}$ ، $٣ \times {}^{ن}ق_{٦}$ ، $٣ \times {}^{ن}ق_{٧}$ تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة ن

ب) إذا كان $٢ \times {}^{١٤}ق_{ر+١}$ ، $٣ \times {}^{١٤}ق_{ر}$ ، $٦ \times {}^{١٤}ق_{ر-١}$ فى تتابع هندسى فأوجد قيمة ر.

(٣٠) أوجد قيمة كل من ن، ر فى كل مما يأتى:

أ) $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر+٢} = ١ : ٢ : ٣$

ب) $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+١} = ١٥ : ٢٨ : ٢٤$

ج) $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+٤} = ٣ : ١٤ : ١٤$

د) $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٩ : ٥$ ، $^{١٥}ق_{ر} = {}^{١٥}ق_{٣ر-٥}$

هـ) $^{٣٠}ق_{ر} = {}^{٣٠}ق_{ر+١٠}$ ، $^{ن}ل_{٧} = ٩٠ \times {}^{ن-٢}ل_{٥}$

(٣١) لدينا ٤ نقاط فى مستوى واحد، وليست على استقامة واحدة ، أوجد عدد القطع المستقيمة التى تصل كل منها بين نقطتين؟

(٣٢) كم طريقة يمكن بها اختيار ثلاثة أشخاص من بين خمسة أشخاص؟

(٣٣) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنة للطلبة بها أعضاء من بين ٢٠ طالبًا وعشر طالبات، بحيث تتكون اللجنة من ٤ طلاب وطالبتين؟

(٣٤) كم طريقة يمكن بها تكوين فريق من سبعة أعضاء من بين تسع بنات وخمسة أولاد، بحيث يحتوى الفريق علي ثلاثة أولاد فقط؟

(٣٥) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصًا بحيث لايدخل شخص فى اللجنتين فى ذات الوقت؟

(٣٦) أوجد عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه:

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٦

(٣٧) أوجد عدد الأقطار لمضلع عدد أضلاعه:

أ) ٦ ب) ٨ ج) ١٢

(٣٨) يُراد تكوين لجنة من ٤ أشخاص من بين ٩ رجال ، ٣ نساء:

أ) أوجد عدد الطرق المختلفة لتكوين هذه اللجنة.

ب) كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة فقط؟

ج) كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة على الأقل؟

الوحدة الأولى

١ - ٢ نظرية ذات الحدين بأُسٍّ صحيح موجب

Binomial theorem in integer positive power

سوف تتعلم

- الربط بين مثلث باسكال ومعاملات مفكوك ذى الحدين.
- الصورة العامة لمفكوك $(س + أ)^{ن}$ حيث $ن \in ص^{+}$
- الصورة العامة للحد العام $ح_{ر+١}$ من مفكوك $(س + أ)^{ن}$
- رتبة وقيمة الحد الأوسط والحدين الأوسطين

مصطلحات أساسية

- مفكوك *The expansion*
- ذات حدين *Binomial*
- الحد العام *The general term*
- الحد الأوسط *The middle term*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*
- برامج رسومية *Graphical programs*

فكر و ناقش

نعلم أن:

$(س + أ)^{١} = س + أ$

$(س + أ)^{٢} = س^{٢} + ٢س أ + أ^{٢}$

ويمكن استنتاج أن:

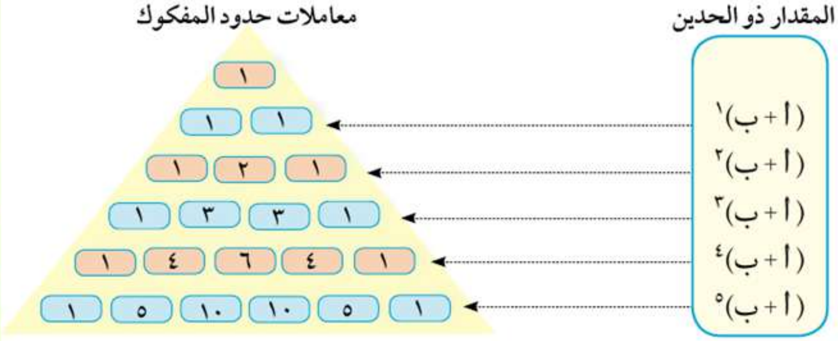
$(س + أ)^{٣} = س^{٣} + ٣س^{٢} أ + ٣س أ^{٢} + أ^{٣}$

$(س + أ)^{٤} = س^{٤} + ٤س^{٣} أ + ٦س^{٢} أ^{٢} + ٤س أ^{٣} + أ^{٤}$

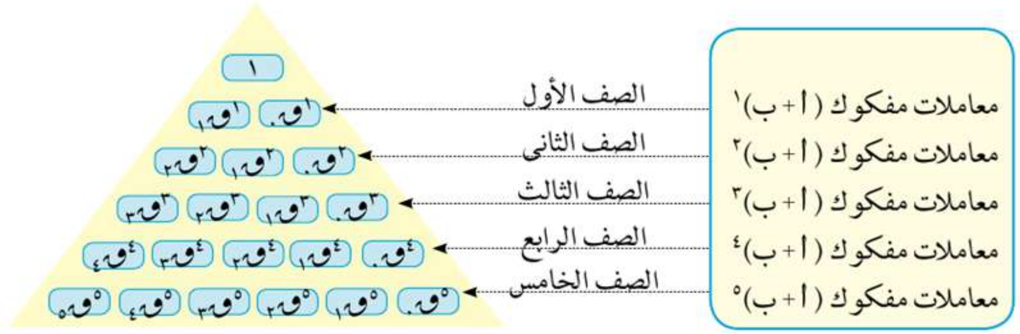
- ما العلاقة بين عدد الحدود وقيمة الأس؟
- ما العلاقة بين قوى المتغيرين س ، أ فى كل حد من حدود المفكوك؟
- ماذا تلاحظ عن معاملات الحدود فى كل حدود المفكوك؟
- هل يمكن استخدام مثلث باسكال للتعبير عن المعاملات؟
- حاول استنتاج قاعدة إيجاد مفكوك $(أ + ب)^{ن}$

مثلث باسكال *Pascal triangle*

لاحظ أن: معاملات المفكوك تتبع نمطًا يمثله مثلث باسكال



- يمكن كتابة مثلث باسكال باستخدام التوافيق كما فى الشكل التالى:



بملاحظة الصف الثانى مثلا من مثلث باسكال نلاحظ أن ١، ٢، ١ تمثل ${}^{2}\text{وه}_{0}$، ${}^{2}\text{وه}_{1}$، ${}^{2}\text{وه}_{2}$ على الترتيب وأن مجموع هذه العناصر ${}^{2}\text{وه}_{0}$، ${}^{2}\text{وه}_{1}$، ${}^{2}\text{وه}_{2}$ تمثل عدد المجموعات الجزئية التى يمكن تكوينها من مجموعة تحتوى على عنصرين حيث ${}^{2}\text{وه}_{0} + {}^{2}\text{وه}_{1} + {}^{2}\text{وه}_{2} = 4 = 2^{2}$

١
١ ١
١ ٢ ١

المجموعة {س ، ص} مجموعتها الجزئية ϕ ، {س} ، {ص}،{ س ، ص}

وبالمثل فإن: مجموع عناصر الصف الثالث

${}^{3}\text{وه}_{0}$، ${}^{3}\text{وه}_{1}$ ، ${}^{3}\text{وه}_{2}$ ، ${}^{3}\text{وه}_{3}$ تمثل عدد المجموعات الجزئية التى نحصل عليها من مجموعة تحتوى على ٣ عناصر وعدد هذه المجموعات ٨ = 2^{3}

أى ${}^{3}\text{وه}_{0} + {}^{3}\text{وه}_{1} + {}^{3}\text{وه}_{2} + {}^{3}\text{وه}_{3} = 2^{3}$

١
١ ١
١ ٢ ١
١ ٣ ٣ ١

وعلى وجه العموم إذا كان لدينا مجموعة عدد عناصرها ن فإن عدد المجموعات الجزئية التى يمكن الحصول عليها منها = $2^{ن}$ أى ${}^{ن}\text{وه}_{0} + {}^{ن}\text{وه}_{1} + {}^{ن}\text{وه}_{2} + \dots + {}^{ن}\text{وه}_{ن} = 2^{ن}$

تعبير شفهى: بالاستعانة بمثلث باسكال

١) أوجد معاملات (أ + ب)^{6} على صورة توافيق.
٢) أوجد معاملات (أ + ب)^{5} على صورة توافيق.

تعلم

مفكوك ذى الحدين

إذا كان أ ، س∈ ع ، ن ∈ ص$^{+}$ يكون:

١- $(س + أ)^{ن} = س^{ن} + {}^{ن}\text{وه}_{1}\, س^{ن-1} أ + {}^{ن}\text{وه}_{2}\, س^{ن-2} أ^{2} + \dots + أ^{ن}$

٢- $(س - أ)^{ن} = س^{ن} - {}^{ن}\text{وه}_{1}\, س^{ن-1} أ + {}^{ن}\text{وه}_{2}\, س^{ن-2} أ^{2} - \dots + (-أ)^{ن}$

ملاحظات على مفكوك ذى الحدين $(س + أ)^{ن}$

١) عدد حدود المفكوك (ن + ١) حدًا
٢) المفكوك مرتب حسب قوى س تنازليًا ومرتب حسب قوى أ تصاعديًا.
٣) مجموع قوى س وقوى أ فى أى حد يساوى ن.
٤) دليل وه فى أى حد من حدود المفكوك يقل واحدًا صحيحًا عن رتبة ذلك الحد .

مثال

كتابة مفكوك ذات الحدين

(١) اكتب مفكوك $(٢س + ٣ص)^{٤}$

الحل

$(٢س + ٣ص)^{٤} = (٢س)^{٤} + {}^{٤}ق_{١}(٢س)^{٣}(٣ص) + {}^{٤}ق_{٢}(٢س)^{٢}(٣ص)^{٢} + {}^{٤}ق_{٣}(٢س)(٣ص)^{٣} + (٣ص)^{٤}$

$= ١٦س^{٤} + ٩٦س^{٣}ص + ٢١٦س^{٢}ص^{٢} + ٢١٦س ص^{٣} + ٨١ص^{٤}$

حاول أن تحل

(١) اكتب مفكوك:

أ $(٣س + ص)^{٥}$ ب $(س^{٢} - ١)^{٦}$

حالات خاصة من مفكوك ذي الحدين:

أ $(١ + س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}س + {}^{ن}ق_{٢}س^{٢} + ... + س^{ن}$

ب $(١ - س)^{ن} = ١ - {}^{ن}ق_{١}س + {}^{ن}ق_{٢}س^{٢} - ... + (-س)^{ن}$

مثال

(٢) اكتب مفكوك $(١ + س)^{٦}$، ثم استخدم ذلك في إيجاد قيمة عددية للمقدار: ${}^{٦}ق_{٠} + {}^{٦}ق_{١} + {}^{٦}ق_{٢} + ... + {}^{٦}ق_{٦}$

الحل

$(١ + س)^{٦} = ١ + {}^{٦}ق_{١}س + {}^{٦}ق_{٢}س^{٢} + {}^{٦}ق_{٣}س^{٣} + {}^{٦}ق_{٤}س^{٤} + {}^{٦}ق_{٥}س^{٥} + س^{٦}$

بوضع س = ١ في الطرفين

$(١ + ١)^{٦} = ١ + {}^{٦}ق_{١} + {}^{٦}ق_{٢} + {}^{٦}ق_{٣} + ... + ١$

$٢^{٦} = {}^{٦}ق_{٠} + {}^{٦}ق_{١} + {}^{٦}ق_{٢} + {}^{٦}ق_{٣} + ... + {}^{٦}ق_{٦}$

حاول أن تحل

(٢) اكتب مفكوك $(١ - س)^{٨}$، ثم استخدم ذلك في إيجاد قيمة: $١ - {}^{٨}ق_{١} + {}^{٨}ق_{٢} - {}^{٨}ق_{٣} + ... + {}^{٨}ق_{٨}$

مثال

(٣) أوجد قيمة $(١,٠١)^{٩}$، مُقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية، مستخدمًا نظرية ذات الحدين.

الحل

$(١,٠١)^{٩} = (١ + ٠,٠١)^{٩}$

$= ١ + {}^{٩}ق_{١}(\frac{١}{١٠٠}) + {}^{٩}ق_{٢}(\frac{١}{١٠٠})^{٢} + {}^{٩}ق_{٣}(\frac{١}{١٠٠})^{٣} + ..$

$= ١ + ٠,٠٩ + ٠,٠٠٣٦ + ٠,٠٠٠٠٨٤ + ..$ حدود أقل من ٠,٠٠١

$= ١,٠٩٣٦ \simeq ١,٠٩٤$

حاول أن تحل

(٣) أوجد قيمة $(٠,٩٨)^{١٠}$ باستخدام نظرية ذات الحدين، مقربًا الجواب لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

الحد العام من مفكوك ذات الحدين *The general term of the expansion of binomial*

في مفكوك $(س + ص)^{ن} = س^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\, س^{ن-١} ص + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{ن-٢} ص^{٢} + ... + ص^{ن}$

لاحظ أن $ح_{٢} = {}^{ن}ق_{١}\, س^{ن-١} ص^{١}$ ، $ح_{٣} = {}^{ن}ق_{٢}\, س^{ن-٢} ص^{٢}$

وبالمثل يكون: $ح_{٩} = {}^{ن}ق_{٨}\, س^{ن-٨} ص^{٨}$

وبفرض الحد العام $ح_{ر+١}$ حيث $٠ \leqslant ر \leqslant ن$ فإن حيث $ح_{ر+١}$ يمكن كتابته على الصورة:

$$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, (س)^{ن-ر} (ص)^{ر}$$

مثال

٤) من مفكوك $(س + \frac{٢}{س})^{٨}$ **أوجد معامل الحد السادس**

الحل

$ح_{٦} = {}^{٨}ق_{٥}\, (س)^{٣} (\frac{٢}{س})^{٥} = {}^{٨}ق_{٥} \times ٢^{٥} س^{-٢} = ١٧٩٢\, س^{-٢}$

ومعامل هذا الحد = ١٧٩٢

لاحظ معامل $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}$ (معامل الحد الأول)$^{ن-ر}$ (معامل الحد الثانى)^{ر}

حاول أن تحل

٤) فى مفكوك $(٢س + \frac{١}{٢})^{٧}$، أوجد كل من $ح_{٣}$ ، $ح_{٧}$ حسب قوى س التنازلية، و إذا كان $ح_{٣} = ح_{٧}$ ، أوجد قيمة س

مثال

٥) من مفكوك $(٣س^{٢} - \frac{١}{٢س})^{١٣}$ ، أوجد الحد العاشر من النهاية.

الحل

الحد العاشر من النهاية فى مفكوك $(٣س^{٢} - \frac{١}{٢س})^{١٣}$ هو الحد العاشر من البداية فى مفكوك $(\frac{-١}{٢س} + ٣س^{٢})^{١٣}$

$ح_{١٠} = {}^{١٣}ق_{٩}\, (\frac{-١}{٢س})^{٤} (٣س^{٢})^{٩} = \frac{٧١٥ \times ٣^{٩}}{٢^{٤}}\, س^{١٤}$

حل آخر

لاحظ أنه يمكن حساب رتبة الحد العاشر من النهاية فى مفكوك $(٣س^{٢} - \frac{١}{٢س})^{١٣}$، وتكون رتبته مساوية

$١٤ - ١٠ + ١ = ٥$

$ح_{١٠}$ من النهاية هو $ح_{٥}$ من ويكون البداية $ح_{٥} = {}^{١٣}ق_{٤}\, (٣س^{٢})^{٩} (\frac{-١}{٢س})^{٤} = \frac{٧١٥ \times ٣^{٩}}{٢^{٤}}\, س^{١٤}$

حاول أن تحل

٥) من مفكوك $(٢س - \frac{١}{٣س^{٢}})^{١١}$ أوجد الحد الرابع من النهاية:

قاعدة

١) $(س + أ)^{ن} + (س - أ)^{ن} = ٢ (ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + ...)$

٢) $(س + أ)^{ن} - (س - أ)^{ن} = ٢ (ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + ...)$

مثال

(٦) أوجد فى ابسط صورة (س + ٢)^{٦} + (س - ٢)^{٦}

الحل

(س + ٢)^{٦} + (س - ٢)^{٦} = ٢ (ح$_{١}$ + ح$_{٣}$ + ح$_{٥}$ + ح$_{٧}$)

= ٢ (س^{٦} + ^{٦}ق$_{٢}$ س^{٤} × ٢^{٢} + ^{٦}ق$_{٤}$ س^{٢} × ٢^{٤} + ٢^{٦}) = ٢ (س^{٦} + ٦٠س^{٤} + ٢٤٠ س^{٢} + ٦٤)

حاول أن تحل

(٦) أوجد فى أبسط صورة (١ + $\sqrt{\text{س}}$)^{٥} - (١ - $\sqrt{\text{س}}$)^{٥}

٢) أوجد لأقرب ثلاثة أرقام عشرية (١,٠٣)^{٨} + (٠,٩٧)^{٨}، مستخدمًا نظرية ذات الحدين.

مثال

(٧) من مفكوك (٣ + س)^{١١} - ^{١١}ق$_{١}$ (٣ + س)^{١٠} (١ - ٢س) + ^{١١}ق$_{٢}$ (٣ + س)^{٩} (١ - ٢س)^{٢} - ...... - (١ - ٢س)^{١١}

أوجد الحد الخامس.

الحل

المقدار يمثل مفكوك [(٣ + س) - (١ - ٢س)]^{١١} = (٢ + ٣س)^{١١}

ويكون:

ح$_{٥}$ = ^{١١}ق$_{٤}$(٢)^{٧} (٣س)^{٤} = ٣٣٠ × ٢^{٧} × ٣^{٤} س^{٤} = ٣٤٢١٤٤٠ س^{٤}

حاول أن تحل

(٧) من مفكوك (١ - س)^{٨} + ٢٤ س (١ - س)^{٧} + ٢٥٢ س^{٢} (١ - س)^{٦} + ... + ٦٥٦١س^{٨}، أوجد القيمة العددية للحد السادس عندما س = ١

مثال

(٨) إذا كان (١ + جـ س)^{ن} = ١ + ٢٠ س + أ$_{١}$ س^{٢} + أ$_{٢}$ س^{٣} + ... + أ$_{ن-١}$ س^{ن}

وكان ١٦ أ$_{١}$ = ٣ أ$_{٢}$ أوجد قيمة كل من ن، جـ حيث جـ ≠ ٠

الحل

(١ + جـ س)^{ن} = ١ + ^{ن}ق$_{١}$ جـ س + ^{ن}ق$_{٢}$ جـ^{٢} س^{٢} + ^{ن}ق$_{٣}$ جـ^{٣} س^{٣} + ...

∴ ^{ن}ق$_{١}$ جـ = ٢٠ ∴ ن جـ = ٢٠ ∴ جـ = $\frac{٢٠}{ن}$ (١)

∵ ١٦ × ^{ن}ق$_{٢}$ جـ^{٢} = ٣ × ^{ن}ق$_{٣}$ جـ^{٣} ∴ ١٦ × ^{ن}ق$_{٢}$ = ٣ × ^{ن}ق$_{٣}$ جـ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) ∴ ١٦ × ^{ن}ق$_{٢}$ = ٣ × ^{ن}ق$_{٣}$ × $\frac{٢٠}{ن}$

∴ ١٦ ن = ٣ × $\frac{^{ن}ق_{٣}}{^{ن}ق_{٢}}$ × ٢٠ ∴ ١٦ن = ٣ × $\frac{ن - ٢}{٣}$ × ٢٠ ∴ ن = ١٠

بالتعويض فى المعادلة (١) ∴ جـ = $\frac{٢٠}{١٠}$ = ٢

حاول أن تحل

(٨) من مفكوك $(\text{١} + \text{جـ}\,\text{س})^{\text{١٠}}$ إذا كان معامل الحد الثالث يساوى ١٨٠، وكان الحد الخامس يساوى ٢١٠ أوجد قيمة كل من جـ ، س حيث جـ عدد صحيح موجب.

مثال

(٩) أوجد معامل $\text{س}^{\text{١٠}}$ فى مفكوك $(\text{١} + \text{س} - \text{س}^{\text{٢}})^{\text{٩}}$

الحل

فى مفكوك $(\text{١} + (\text{س} - \text{س}^{\text{٢}}))^{\text{٩}}$

$\because \text{ح}_{\text{ر}+\text{١}} = {}^{\text{٩}}\text{ق}_{\text{ر}} \times (\text{س} - \text{س}^{\text{٢}})^{\text{ر}}$

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}+\text{١}} = {}^{\text{٩}}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{س}^{\text{ر}} \times (\text{١} - \text{س})^{\text{ر}}$

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}+\text{١}} = {}^{\text{٩}}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{س}^{\text{ر}} \times {}^{\text{ر}}\text{ق}_{\text{م}} (-\text{س})^{\text{م}}$

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}+\text{١}} = (-\text{١})^{\text{م}} \times {}^{\text{٩}}\text{ق}_{\text{ر}} \times {}^{\text{ر}}\text{ق}_{\text{م}} \times \text{س}^{\text{ر}+\text{م}}$

لايجاد معامل $\text{س}^{\text{١٠}}$ نضع

$\text{ر} + \text{م} = \text{١٠}$ حيث $\text{م} \leqslant \text{ر} < \text{١٠}$

ر = ٥	ر = ٦	ر = ٧	ر = ٨	ر = ٩
م = ٥	م = ٤	م = ٣	م = ٢	م = ١

معامل $\text{س}^{\text{١٠}} = -{}^{\text{٩}}\text{ق}_{\text{٥}} \times {}^{\text{٥}}\text{ق}_{\text{٥}} + {}^{\text{٩}}\text{ق}_{\text{٦}} \times {}^{\text{٦}}\text{ق}_{\text{٤}} - {}^{\text{٩}}\text{ق}_{\text{٧}} \times {}^{\text{٧}}\text{ق}_{\text{٣}} + {}^{\text{٩}}\text{ق}_{\text{٨}} \times {}^{\text{٨}}\text{ق}_{\text{٢}} - {}^{\text{٩}}\text{ق}_{\text{٩}} \times {}^{\text{٩}}\text{ق}_{\text{١}}$

$\therefore$ معامل $\text{س}^{\text{١٠}} = -\text{١٢٦} + \text{١٢٦٠} - \text{١٢٦٠} + \text{٢٥٢} - \text{٩} = \text{١١٧}$

حاول أن تحل

(٩) أوجد معامل $\text{س}^{\text{٢}}$ فى مفكوك $(\text{١} + \text{س} + \text{س}^{\text{٢}})^{\text{٥}}$

مثال

(١٠) (أ) أثبت أن $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}-\text{١}}\text{ق}_{\text{ر}-\text{١}}} = \dfrac{\text{ن}}{\text{ر}}$

(ب) إذا كانت النسبة بين $\text{ح}_{\text{٦}}$ من مفكوك $(\text{س} + \dfrac{\text{١}}{\text{س}})^{\text{١٥}}$ ، $\text{ح}_{\text{٥}}$ من مفكوك $(\text{س} - \dfrac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}})^{\text{١٤}}$ تساوى $\frac{\text{٨}}{\text{٩}}$ أوجد قيمة س

الحل

$${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \div {}^{\text{ن}-\text{١}}\text{ق}_{\text{ر}-\text{١}} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!} \times \frac{(\text{ر}-\text{١})!\,(\text{ن}-\text{١}-\text{ر}+\text{١})!}{(\text{ن}-\text{١})!} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن}-\text{١})!\,(\text{ر}-\text{١})!}{\text{ر}\,(\text{ر}-\text{١})!\,(\text{ن}-\text{١})!} = \frac{\text{ن}}{\text{ر}}$$

$$= \frac{\text{ح}_{\text{٦}} \text{ من } (\text{س} + \frac{\text{١}}{\text{س}})^{\text{١٥}}}{\text{ح}_{\text{٥}} \text{ من } (\text{س} - \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}})^{\text{١٤}}} = \frac{{}^{\text{١٥}}\text{ق}_{\text{٥}}\, \text{س}^{\text{١٠}} (\frac{\text{١}}{\text{س}})^{\text{٥}}}{{}^{\text{١٤}}\text{ق}_{\text{٤}}\, \text{س}^{\text{١٠}} (\frac{-\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}})^{\text{٤}}} = \frac{\text{٨}}{\text{٩}}$$

$\therefore \text{٣}\text{س}^{\text{٣}} = \frac{\text{٨}}{\text{٩}}$ $\quad \therefore \text{س}^{\text{٣}} = \frac{\text{٨}}{\text{٢٧}}$ $\quad \therefore \text{س} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

حاول أن تحل

(١٠) برهن باستخدام نظرية ذات الحدين أن $(^{\text{ن}}\text{ق}_{\cdot})^{٢} + (^{\text{ن}}\text{ق}_{١})^{٢} + (^{\text{ن}}\text{ق}_{٢})^{٢} + ... + (^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}})^{٢} = {}^{٢\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}$

الحد الأوسط فى مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ *The middle term*

فى مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ نجد أن عدد حدود المفكوك = ن + ١

أولا: إذا كانت ن عددًا زوجيًّا، فإن عدد حدود المفكوك هو عدد فردى، و يوجد للمفكوك حد أوسط وحيد رتبته $\frac{\text{ن}+٢}{٢}$ $(\frac{\text{ن}}{٢} + ١)$

ثانيًا: إذا كانت ن عددًا فرديًّا، فإن عدد حدود المفكوك هو عدد زوجى، و يوجد للمفكوك حدان أوسطان رتبتاهما $\frac{\text{ن}+١}{٢}$ ، $\frac{\text{ن}+٣}{٢}$

مثال

(١١) أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(٢\text{س} + \frac{١}{٢\text{س}^{٢}})^{١٢}$

الحل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٢}{٢} + ١ = ٧$

$\text{ح}_{٧} = {}^{١٢}\text{ق}_{٦} (٢\text{س})^{٦} (\frac{١}{٢\text{س}^{٢}})^{٦} = {}^{١٢}\text{ق}_{٦} (٢)^{٦} (\frac{١}{٢})^{٦} \text{س}^{٦ - ١٢} = {}^{١٢}\text{ق}_{٦} \text{س}^{-٦}$

حاول أن تحل

(١١) أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(\text{س}^{٢} + \frac{١}{٢\text{س}})^{١٠}$ ، و إذا كانت قيمة هذا الحد = $\frac{٢٨}{٢٧}$ أوجد قيمة س

مثال

(١٢) أوجد الحدين الأوسطين فى مفكوك $(\frac{\text{س}^{٢}}{٣} + \frac{٣}{\text{س}})^{١٥}$

الحل

رتبة الحدين الأوسطين تساوى $\frac{١٥+١}{٢}$ والذى يليه أى $\text{ح}_{٨}$ ، $\text{ح}_{٩}$

$\text{ح}_{٨} = {}^{١٥}\text{ق}_{٧} (\frac{\text{س}^{٢}}{٣})^{٨} (\frac{٣}{\text{س}})^{٧} = {}^{١٥}\text{ق}_{٧} \times ٣^{-٨+٧} \times \text{س}^{١٦-٧} = {}^{١٥}\text{ق}_{٧} \times \frac{١}{٣} \text{س}^{٩}$

$\text{ح}_{٩} = {}^{١٥}\text{ق}_{٨} (\frac{\text{س}^{٢}}{٣})^{٧} (\frac{٣}{\text{س}})^{٨} = {}^{١٥}\text{ق}_{٨} \times ٣^{٨-٧} \times \text{س}^{١٤-٨} = {}^{١٥}\text{ق}_{٨} \times ٣ \text{س}^{٦}$

حاول أن تحل

(١٢) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(٣\text{س} + ٢\text{ص})^{١٣}$ متساويين فأثبت أن $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{٣}$

مثال

(١٣) أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(٣ + ٢س)^٨ + (٣ - ٢س)^٨$

الحل

رتبة الحد الأوسط $= \frac{٨}{٢} + ١ = ٥$

$ع_٥ = {}^٨ق_٤ (٣)^٤ (٢س)^٤ + {}^٨ق_٤ (٣)^٤ (-٢س)^٤$

$= ٢ \times {}^٨ق_٤ (٣)^٤ (٢س)^٤ = ١٨١٤٤٠ س^٤$

حاول أن تحل

(١٣) أوجد الحد الأوسط من مفكوك $\left(٢\sqrt{س} + \frac{١}{٢\sqrt{س}}\right)^{١٠} + \left(٢\sqrt{س} - \frac{١}{٢\sqrt{س}}\right)^{١٠}$

تمارين (١ - ٢)

اختر الإجابة الصحيحة:

(١) إذا كان رتبتا الحدان الأوسطان فى مفكوك $(س + ص)^ن$ هما ٧، ٨ فإن ن تساوى:

أ ١٤ — ب ١٥ — ج ١٦ — د ٥٦

(٢) إذا كان $١ + ٥ س + \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} س^٢ + \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} س^٣ + ... + س^٥ = ١٠٢٤$ فإن س تساوى:

أ ١ — ب ٢ — ج ١٠ — د ٣

(٣) مجموع معاملات حدود مفكوك $(س^٢ - \frac{١}{س})^٧$ يساوى:

أ $٢^٧$ — ب $٢^٥$ — ج $٢^٦$ — د صفر

(٤) معامل الحد الخامس من مفكوك $(١ + ٢س)^{١٠}$.

أ $١٦ \, {}^{١٠}ق_٥$ — ب $\frac{١}{١٦} \, {}^{١٠}ق_٥$ — ج $١٦ \, {}^{١٠}ق_٤$ — د $\frac{١}{١٦} \, {}^{١٠}ق_٤$

(٥) فى مفكوك ذى الحدين إذا كان الحد العام هو $ {}^{١٢}ق_ر \, س^{٢٤ - ٤ر}$ يكون الحد المشتمل على $س^{١٢}$ هو:

أ $ع_٣$ — ب $ع_٤$ — ج $ع_٥$ — د لايوجد

(٦) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(أ + ٢ب)^{٢ن + ١}$ متساويين فإن:

أ $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٢}$ — ب أ = ٤ب — ج أ = ٨ب — د أ = ٢ب

(٧) إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك $\left(\frac{أ^٢}{٣} + \frac{ب}{أ^٢}\right)^{٨ن}$ هو الحد التاسع فإن ن تساوى:

أ ١ — ب ٢ — ج ٣ — د ٤

(٨) في مفكوك $(1 + ب\,س)^9$ يكون معامل الحد السادس هو:

أ) ${}^9ق_5$ ب) ${}^9ق_6$ ج) ${}^9ق_5\,ب^5$ د) ${}^9ق_6\,ب^6$

(٩) في مفكوك ذي الحدين لدينا ٧ حدود موجبة، ٦ حدود سالبة فإن المقدار يكون على الصورة:

أ) $(أ - ب)^{12}$ ب) $(أ - ب)^{13}$ ج) $(أ + ب)^{12}$ د) $(أ - ب)^{13}$

ثانيًا : أجب عما يأتي:

(١٠) إذا كان $1 + 8س + {}^8ق_2\,س^2 + ... + س^8 = 256$ أوجد قيمة س

(١١) أوجد لأقرب رقم من ألف مستخدمًا نظرية ذي الحدين قيمة كل من :

أ) $(1,003)^5$ ب) $(0,998)^7$ ج) $(1,01)^6 + (0,99)^6$ د) $(1,02)^8 - (0,98)^8$

(١٢) أوجد قيمة س التي تحقق $(1 + \sqrt{3})^6 - (1 - \sqrt{3})^6 = 480\sqrt{3}\,س$

(١٣) باستخدام المفكوك : $(1 + س)^{10} = 1 + {}^{10}ق_1\,س + {}^{10}ق_2\,س^2 + ... + س^{10}$ أثبت أن:

أ) $1 + {}^{10}ق_1 + {}^{10}ق_2 + ... + {}^{10}ق_{10} = 2^{10}$ ب) $1 - {}^{10}ق_1 + {}^{10}ق_2 - ...... + {}^{10}ق_{10} =$ صفر

(١٤) اكتب مفكوك كلًّا من :

أ) $(\frac{2}{س} + \frac{س}{2})^4$ ب) $(س - \frac{1}{س})^5$

ج) $(س + \sqrt{2})^4 + (س - \sqrt{2})^4$ د) $(\sqrt{3} + 2س)^5 - (\sqrt{3} - 2س)^5$

(١٥) من مفكوك $(1 + س)^ن$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ح_3 = 28س^2$ ، $ح_5 = 1120$ أوجد قيمة كل من: ن، س

(١٦) من مفكوك $(1 + س)^ن$ إذا كان معامل الحد السادس يساوي معامل الحد العاشر أوجد قيمة ن.

(١٧) من مفكوك $(أ\,س + ب)^{10}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان معامل $ح_6 = \frac{63}{8}$ اثبت ان $2\,أ\,ب = 1$

(١٨) من مفكوك $(2س^2 + \frac{1}{2س})^{12}$ أوجد الحد الأوسط.

(١٩) من مفكوك $(\frac{س^2}{2} - \frac{2}{س})^{11}$ أوجد الحدين الأوسطين.

(٢٠) من مفكوك $س^4(س - \frac{1}{س})^9$ حسب قوى س التنازلية، أوجد الحد الرابع من النهاية.

(٢١) إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(س^2 + \frac{1}{2س})^{10}$ يساوي $\frac{28}{27}$ فأوجد قيمة س.

(٢٢) أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الخامس من مفكوك $(\frac{2س}{3} + \frac{3}{2س})^{10}$ ، ثم أوجد القيمة العددية للنسبة عندما $س = 3$

(٢٣) إذا كانت النسبة بين الحد الخامس من مفكوك $(س + \frac{1}{س})^{15}$ والحد الرابع من مفكوك $(س - \frac{1}{س^2})^{14}$ تساوي $-16 : 15$ أوجد قيمة س

١ - ٣ إيجاد الحد المشتمل على س$^{\text{ك}}$ من مفكوك ذات الحدين

Finding the term contain x^R in the expansion of binomial

فكر و ناقش

تعلمنا فى الدرس السابق أن :

$$\left(\text{س}^2 - \frac{1}{\text{س}^2}\right)^{20} = (\text{س}^2)^{20} - {}^{20}\text{ق}_1 (\text{س}^2)^{19}\left(\frac{1}{\text{س}^2}\right) + {}^{20}\text{ق}_2 (\text{س}^2)^{18}\left(\frac{1}{2}\text{س}\right)^{2} - {}^{20}\text{ق}_3 (\text{س}^2)^{17}\left(\frac{1}{\text{س}^2}\right)^{3} + \dots + \left(\frac{-1}{\text{س}^2}\right)^{20}$$

هل من السهل أن نُوجِد الحد المشتمل على س^{16} أو س^{24} أو الحد الخالى من س أو بدون الاسترسال فى كتابة حدود المفكوك؟

نجد أن طريقة البحث بإيجاد المفكوك تكون شاقة؛ ولهذا لإيجاد الحد المشتمل على س$^{\text{ك}}$ من المفكوك نتبع الآتى :

١- نفترض أن هذا الحد هو الحد العام ع$_{\text{ر}+1}$ ونوجد هذا الحد بدلالة ر.

٢- نوجد مجموع قوى س فى الحد العام بدلالة ر ونضع هذا المجموع مساويًا للقوة المطلوبة ك، ومنها نوجد ر التى تحقق احتواء هذا الحد على القوة المطلوبة ك ولدينا:

(أ) ر $\in$ ط يكون ر + ١ هو الحد المطلوب.

(ب) ر $\notin$ ط لا يوجد حد يحتوى على القوة المطلوبة من المفكوك.

فى حالة البحث عن الحد الخالى من س نضع مجموع قوى س من الحد العام = صفر

مثال

(١) من مفكوك $\left(\frac{3\text{س}}{2} + \frac{2}{3\text{س}}\right)^{11}$ أوجد معامل س فى هذا المفكوك .

الحل

$$\text{ع}_{\text{ر}+1} = {}^{11}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{3\text{س}}{2}\right)^{11-\text{ر}} \left(\frac{2}{3\text{س}}\right)^{\text{ر}}$$

وبمقارنة القوى س$^{11-\text{ر}-\text{ر}}$ = س^{1}

$11 - 2\text{ر} = 1$ ر = ٥

الحد المطلوب هو الحد السادس.   معامل ع$_6$ = $ {}^{11}\text{ق}_5 \left(\frac{3}{2}\right)^{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{5} = 693$

سوف تتعلم

- استخدام الحد العام فى إيجاد الحد المشتمل على س$^{\text{ك}}$ والحد الخالى من س .
- إيجاد معامل الحد المشتمل على س$^{\text{ك}}$ من المفكوك .
- إيجاد معامل أكبر قوة لـ س.

مصطلحات أساسية

- حد عام — *General term*
- حد خالٍ من س — *Free term of x*
- أكبر قوة — *Heightest power*
- معامل حد — *Coefficient*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

حاول أن تحل

(١) أوجد معامل $س^{٨}$ فى مفكوك $\left(\frac{٢س}{٣} - \frac{٣}{س}\right)^{١٢}$

مثال

(٢) من مفكوك $\left(٢س - \frac{١}{٢س^{٢}}\right)^{٩}$ أوجد :

(أ) معامل $س^{٣}$ (ب) الحد الخالى من س

(جـ) أثبت أن المفكوك لا يحتوى على حد يشتمل على $س^{٢}$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} (٢س)^{٩-ر} \left(\frac{-١}{٢س^{٢}}\right)^{ر} = {}^{٩}ق_{ر} (-١)^{ر} (٢)^{٩-٢ر} س^{٩-٣ر}$

وبمقارنة الأسس

(أ) لإيجاد معامل $س^{٣}$

$س^{٩-٣ر} = س^{٣}$ $\quad ٩ - ٣ر = ٣$ $\quad ر = ٢$

الحد الثالث يحتوى على $س^{٣}$

معامل $ح_{٣} = {}^{٩}ق_{٢} \times ٢^{٥} = ٣٦ \times ٣٢ = ١١٥٢$

(ب) لإيجاد الحد الخالى من س $\quad ٩ - ٣ر = $ صفر $\quad ر = ٣$

الحد المطلوب هو $ح_{٤} = {}^{٩}ق_{٣} (-١)^{٣} (٢)^{٣} = -٦٧٢$

(جـ) بوضع $٩ - ٣ر = ٢$ $\quad \therefore ٧ = ٣ر$ $\quad \therefore ر = \frac{٧}{٣} \notin ط$

$\therefore$ هذا المفكوك لا يشتمل على $س^{٢}$

حاول أن تحل

(٢) (أ) أوجد الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(٢س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{١٢}$

(ب) أوجد معامل $س^{-١٠}$ فى مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٣} - \frac{٢}{س^{٢}}\right)^{١٥}$

(جـ) من مفكوك $\left(أ س + \frac{١}{ب س}\right)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالى من س يساوى معامل الحد السابع، أثبت أن $١٦ أ ب = ٥$

مثال

(٣) إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا أثبت أنه لا يوجد حدٌّ خالٍ من س من مفكوك $\left(س^{٥} + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{ن}$ إلا عندما ن مضاعف للعدد ٧ ثم أوجد هذا الحد فى حالة ن = ٧

الحل

$ع_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر} (س^{5})^{ن - ر} (\frac{1}{س^{2}})^{ر} = {}^{ن}ق_{ر}$ س$^{5ن - 7ر}$

س$^{5ن - 7ر}$ = س^{صفر} 　　 $5ن - 7ر =$ صفر 　　 $ر = \frac{5ن}{7}$

$\frac{5ن}{7} \in$ ص$^{+}$ عندما ن مضاعف للعدد ٧ 　　 عندما ن = ٧

ر = ٥ 　　 الحد الخالى من س هو $ع_{6}$

$ع_{6} = {}^{7}ق_{5} = 21$

حاول أن تحل

(٣) من مفكوك $(س^{2} + \frac{1}{س})^{3ن}$ أوجد:

(أ) معامل الحد الذى يحتوى على $س^{3ن}$

(ب) إذا كانت ن = ٦، أوجد النسبة بين معامل الحد الذى يشتمل على $س^{3ن}$ ومعامل الحد الأوسط

مثال

(٤) من مفكوك $(2 + \frac{س}{3})^{9}$ أوجد قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين متساويين.

الحل

رتبة الحدين الأوسطين $\frac{9 + 1}{2}$ والذى يليه أى $ع_{5}$ ، $ع_{6}$

$\because ع_{5} = ع_{6}$ 　　 $\therefore {}^{9}ق_{4} (2)^{5} (\frac{س}{3})^{4} = {}^{9}ق_{5} (2)^{4} (\frac{س}{3})^{5}$

$2 = \frac{س}{3}$ 　　 $\therefore س = 6$

حاول أن تحل

(٤) أوجد معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(1 + 3س + 3س^{2} + س^{3})^{4}$

تمارين الدرس (١ – ٣)

اختر الإجابة الصحيحة:

(١) الحد المشتمل على $س^{4}$ فى مفكوك $(1 + 2س)^{10}$ يساوى:

(أ) ${}^{10}ق_{4}$ 　 (ب) $\frac{1}{16}\ {}^{10}ق_{4}$ 　 (ج) $16\ {}^{10}ق_{4}$ 　 (د) $32 \times {}^{10}ق_{5}$

(٢) فى مفكوك $(س + \frac{1}{س})^{10}$ يكون الحد الخالى من س هو:

(أ) $ع_{4}$ 　 (ب) $ع_{5}$ 　 (ج) $ع_{6}$ 　 (د) لايوجد حد خال من س

(٣) في مفكوك س^{٣} (١ + س)^{٧} يكون معامل الحد المشتمل على س^{٤} هو:

(أ) ^{٧}ق$_{٤}$ (ب) ^{٧}ق$_{٣}$ (جـ) ^{٧}ق$_{١}$ (د) ٢١

(٤) في مفكوك (س^{٢} + $\frac{٢}{س}$)^{٦} يكون الحد الخالى من س هو الحد

(أ) الثالث. (ب) الرابع. (جـ) الخامس. (د) لا يوجد حد خال من س

(٥) في مفكوك (اس^{٢} + $\frac{١}{اس}$)^{١١} إذا كان معاملا س^{٤}، س^{٧} متساويين فإن ا =

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ±١ (د) ±٢

(٦) إذا كان الحد الخال من س في مفكوك (س + $\frac{١}{س}$)^{ن} هو ع$_{٧}$ فإن ن =

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ٨

(٧) في مفكوك (س^{٢} + $\frac{١}{اس}$)^{٨} إذا كان معامل الحد الأوسط يساوى معامل س^{٧} فإن ا =

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $\frac{-٥}{٤}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

(٨) في مفكوك (ا س + $\frac{١}{ب س}$)^{١٠} حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالي من س يساوى معامل الحد السابع فإن:

(أ) ا ب = $\frac{٦}{٥}$ (ب) ا ب = $\frac{٥}{٦}$ (جـ) ا ب = $\frac{٣٦}{٢٥}$ (د) ا ب = $\frac{٢٥}{٣٦}$

(٩) الحد الخالى من س في مفكوك (٢ س + $\frac{١}{٢س}$)^{٨}

(أ) ٣٥ (ب) ١٤٠ (جـ) ٧٠ (د) ٥٦

(١٠) في مفكوك (١ + ا س)^{٧} حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل ع$_{٥}$= ٥٦٠ فإن ا =

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ±٢ (د) ±٤

اجب عن الاسئلة الآتية :

(١١) في مفكوك (٤س^{٢} + $\frac{١}{٢س}$)^{١٢} أوجد الحد الخالى من س

(١٢) أوجد معامل س^{١٢} في مفكوك س^{٢} ($\frac{س^{٢}}{٢}$ + $\frac{٢}{س^{٣}}$)^{١٥}

(١٣) إذا كان الحد السادس في مفكوك (٢ س - $\frac{١}{س^{٣}}$)^{ن} حسب قوى س التنازلية خاليًا من س، أوجد قيمة ن، ثم ابحث هل احد حدود هذا المفكوك يشتمل على س$^{-٦}$ أم لا؟

(١٤) في مفكوك (٢ س - $\frac{١}{س^{٣}}$)^{٩} أوجد :

أولًا: معامل س^{٣} ثانيًا: الحد الخالى من س

ثالثًا: أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد يشتمل على س^{٢}

(١٥) أثبت أن ^{ن}ق$_{ر}$: $^{ن-١}$ق$_{ر-١}$ = $\frac{ن}{ر}$ وإذا كانت النسبة بين معامل ع$_{١١}$ في مفكوك (١ + س^{٢})^{ن} ومعامل ع$_{١٠}$ في مفكوك (١ - ص)$^{ن-١}$ تساوى -٣ : ٢ أوجد قيمة ن.

(١٦) أوجد معامل $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٤}$ من مفكوك $\left(\frac{٢\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{٢\text{س}}\right)^{١٠}$

(١٧) أوجد معامل $\text{س}^{\text{ن}}$ فى مفكوك $(١ + \text{س})^{٢\text{ن}}$ ، ثم أثبت أنه يساوى ضعف معامل $\text{س}^{\text{ن}}$ من مفكوك $(١ + \text{س})^{٢\text{ن}-١}$

(١٨) فى مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢\text{ن}}$ أثبت أن الحد الخالى من س هو الحد الأوسط، ثم أوجد قيمة هذا الحد عندما ن = ٨

(١٩) فى مفكوك $\left(\text{س}^{\text{ك}} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٦}$ حيث ك عدد صحيح موجب .أوجد :

أولا: قيمة ك التى تجعل للمفكوك حدًّا خاليًا من س

ثانيًا: النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط لأكبر قيمة من قيم ك التى حصلت عليها من أولًا.

(٢٠) فى مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{أ}\text{س}}\right)^{١٢}$ إذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل $\text{س}^{٣}$ من هذا المفكوك تساوى ٥ : ١٦ ، أوجد قيمة أ ثم أوجد قيمة الحد الأوسط عندما س = ٢.

(٢١) فى مفكوك $\left(٢\text{س}^{٢} + \frac{\text{أ}}{\text{س}^{٣}}\right)^{١٠}$ إذا كان معامل س٥ يساوى معامل س١٥ أوجد قيمة أ.

(٢٢) فى مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{٨\text{س}}\right)^{١٣}$ حسب قوى س التنازلية :

أولًا: أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س

ثانيًا: إذا كان $\text{ح}_{٤} = \text{ح}_{١١}$ أوجد قيمة س

(٢٣) فى مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٩}$ أوجد:

اولاً: رتبة وقيمة الحد الخالى من س

ثانيا: قيمة س التى تجعل مجموع الحدين الأوسطين فى المفكوك يساوى صفر.

(٢٤) أوجد قيمة الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(٩\text{س}^{٢} + \frac{١}{٣\text{س}}\right)^{٩}$، ثم أوجد قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين متساويين.

(٢٥) فى مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣\text{ن}}$ اثبت أن الحد الخالى من س يساوى معامل الحد الذى يحتوى على $\text{س}^{٣\text{ن}}$ ، و إذا كانت ن = ٦ فاوجد النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط.

١ - ٤ النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

سوف تتعلم
- إيجاد النسبة بين حدين متتاليين.
- إيجاد النسبة بين معاملى حدين متتاليين.

مصطلحات أساسية
- حدان متتالين *Consecutive terms*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية

من مفكوك (س + أ)$^{\text{ن}}$ وبفرض أن الحدين المتتالين هما $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}}$

$$\frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{س})^{\text{ن}-\text{ر}}\,(\text{أ})^{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}\,(\text{س})^{\text{ن}-\text{ر}+١}\,(\text{أ})^{\text{ر}-١}}$$

$$= \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$$

$$\boxed{\frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}}$$

ويكون : $\dfrac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} = \dfrac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \dfrac{\text{معامل أ}}{\text{معامل س}}$

مثال

(١) من مفكوك (س + ٢ص)^{١٢} أوجد كلًّا من :

أ) $\dfrac{\text{ح}_٣}{\text{ح}_٢}$ ب) $\dfrac{\text{معامل ح}_٧}{\text{معامل ح}_٨}$ ج) $\dfrac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٤}$ د) $\dfrac{\text{معامل ح}_٨}{\text{معامل ح}_٦}$

الحل

أ) $\dfrac{\text{ح}_٣}{\text{ح}_٢} = \dfrac{١٢-٢+١}{٢} \times \left(\dfrac{٢\text{ص}}{\text{س}}\right)$

$= \dfrac{١١}{٢} \times \dfrac{٢\text{ص}}{\text{س}} = \dfrac{١١\text{ص}}{\text{س}}$

ب) $\dfrac{\text{معامل ح}_٧}{\text{معامل ح}_٨} = \dfrac{٧}{١٢-٧+١} \times \dfrac{١}{٢} = \dfrac{٧}{١٢}$

ج) $\dfrac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٤} = \dfrac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٥} \times \dfrac{\text{ح}_٥}{\text{ح}_٤}$

$= \dfrac{١٢-٥+١}{٥} \times \left(\dfrac{٢\text{ص}}{\text{س}}\right) \times \dfrac{١٢-٤+١}{٤}\left(\dfrac{٢\text{ص}}{\text{س}}\right)$

$= \dfrac{٨}{٥} \times \dfrac{٢\text{ص}}{\text{س}} \times \dfrac{٩}{٤} \times \dfrac{٢\text{ص}}{\text{س}} = \dfrac{٧٢\,\text{ص}^٢}{٥\,\text{س}^٢}$

د) $\dfrac{\text{معامل ح}_٨}{\text{معامل ح}_٦} = \dfrac{\text{معامل ح}_٨}{\text{معامل ح}_٧} \times \dfrac{\text{معامل ح}_٧}{\text{معامل ح}_٦}$

$= \dfrac{١٢-٧+١}{٧} \times \dfrac{٢}{١} \times \dfrac{١٢-٦+١}{٦} \times \dfrac{٢}{١}$

$= \dfrac{٦}{٧} \times \dfrac{٢}{١} \times \dfrac{٧}{٦} \times \dfrac{٢}{١} = ٤$

حاول أن تحل

(١) من مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{٢}{س}\right)^{٨}$

أولاً: أوجد النسبة بين الحدين الخامس والسادس، وإذا كانت هذه النسبة تساوى ٨ : ٢٥ أوجد قيمة س

ثانيًا: أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد خالٍ من س

مثال

(٢) من مفكوك $(س + ص)^{٨}$ إذا كان $٢\,ح_{٥} = ح_{٤} + ح_{٦}$ أوجد $\frac{س}{ص}$ عدديًا.

الحل

$ح_{٤} + ح_{٦} = ٢\,ح_{٥}$ بالقسمة على $ح_{٥}$

$$\frac{ح_{٤}}{ح_{٥}} + \frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = ٢$$

$$\frac{٤}{٨ - ٤ + ١}\left(\frac{س}{ص}\right) + \frac{٨ - ٥ + ١}{٥}\left(\frac{ص}{س}\right) = ٢$$

$$\frac{٤س}{٥ص} + \frac{٤ص}{٥س} = \frac{٢}{١}$$ بالضرب × ٥ س ص

$$٤س^{٢} + ٤ص^{٢} = ١٠\,س\,ص$$

$$٤س^{٢} - ١٠\,س\,ص + ٤ص^{٢} = \text{صفر} \div ٢$$

$$٢س^{٢} - ٥\,س\,ص + ٢\,ص^{٢} = ٠$$

$$(٢\,س - ص)\,(س - ٢\,ص) = ٠$$

$$٢\,س = ص \qquad س = ٢\,ص$$

$$\frac{س}{ص} = \frac{١}{٢} \quad \text{أو} \quad \frac{س}{ص} = \frac{٢}{١}$$

حاول أن تحل

(٢) من مفكوك $\left(\sqrt{س} + \frac{١}{س}\right)^{٨}$ إذا كان $ح_{٤}$ ، $ح_{٥}$ ، $٢٥\,ح_{٧}$ ، $ح_{٦}$ متناسبة أوجد قيمة س

مثال

(٣) إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ هى ٣٥ ، ٢١ ، ٧ حسب قوى س التصاعدية، أوجد قيمة كل من ن و رتب الحدود الثلاثة.

الحل

بفرض $ح_{ر}$ ، $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢}$

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٢١}{٣٥} \qquad \frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٣}{٥}$$

$$٥\,ن - ٥\,ر + ٥ = ٣\,ر \qquad \boxed{٥\,ن - ٨\,ر = -٥} \quad (١)$$

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+٢}}{\text{معامل } ح_{ر+١}} = \frac{ن - (ر + ١) + ١}{ر + ١} = \frac{٧}{٢١} \qquad \frac{ن - ر}{ر + ١} = \frac{١}{٣}$$

$$٣ن - ٣\,ر = ر + ١ \qquad \boxed{٣ن - ٤\,ر = ١} \quad (٢)$$

وبحل المعادلتين: (١) ، (٢) $\therefore$ ن = ٧ ، ر = ٥

حاول أن تحل

(٣) إذا كانت الحدود: الثالث ، الرابع ، الخامس من مفكوك $(س + ص)^{ن}$ هى على الترتيب ١١٢ ، ٤٤٨ ، ١١٢٠ ، أوجد قيم كل من ن، ص، س

مثال

إيجاد أكبر حد

(٤) أوجد معامل أكبر حد فى مفكوك $(٢س + ٣ص)^{١٠}$

الحل

$\because \frac{ع_{ر+1}}{ع_ر} = \frac{10+1-ر}{ر} \times \frac{3}{2}$ $\qquad \therefore \frac{ع_{ر+1}}{ع_ر} = \frac{11-ر}{ر} \times \frac{3}{2} = \frac{33-3ر}{2ر}$

أولًا: $\frac{33-3ر}{2ر} \geqslant 1$ $\qquad \therefore 33 - 3ر \geqslant 2ر$ $\qquad \therefore 5ر \leqslant 33$ $\qquad \therefore ر \leqslant 6.6$

من ذلك نستنتج أن $ع_7 > ع_6 > ع_5 > \ldots\ldots > ع_1$

ثانيًا: $\frac{33-3ر}{2ر} \leqslant 1$ $\qquad \therefore 33 - 3ر \leqslant 2ر$ $\qquad \therefore 5ر \geqslant 33$ $\qquad \therefore ر \geqslant 6.6$

من ذلك نستنتج أن $ع_{11} < ع_{10} < ع_9 < ع_8 < ع_7$

$\therefore ع_7$ هو أكبر حد فى مفكوك $(٢س + ٣ص)^{١٠}$ $\quad \therefore$ معامل $ع_7 = {}^{10}ق_6 \times 2^4 \times 3^6$ $\quad \therefore$ معامل $ع_7 = 2449440$

تمارين (١-٤)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) فى مفكوك $(س + ص)^{١٠}$ الحد التاسع : الحد الثامن تساوى ....

أ) $\frac{٣ص}{٨س}$ ب) $\frac{٣س}{٨ص}$ جـ) $\frac{٨ص}{٣س}$ د) $\frac{٨س}{٣ص}$

(٢) فى مفكوك $(١ - س)^{١٢}$ معامل الحد السادس : معامل الحد الخامس ....

أ) $(\frac{8}{5})$ ب) $\frac{5}{8}$ جـ) $\frac{-8}{5}$ د) $\frac{-5}{8}$

(٣) فى مفكوك $(س + ص)^{٨}$ تكون نسبة $\frac{ع_6}{ع_4}$ = ...

أ) $\frac{25 ص^2}{16 س^2}$ ب) $\frac{25 س^2}{16 ص^2}$ جـ) ١   د) $\frac{ص^2}{س^2}$

(٤) فى مفكوك $(٣أ - ٢ب)^{١١}$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب تساوى $\frac{-3}{2}$ فإن أ : ب = ...

أ) ٩ : ٤   ب) ٤ : ٩   جـ) ١   د) -١

ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية:

(٥) من مفكوك $(٢س^{٢} + \frac{٣}{س^{٢}})^{١١}$ أوجد كلًا من:

أ) $\frac{ع_3}{ع_2}$ ب) $\frac{ع_4}{ع_5}$ جـ) $\frac{ع_6}{ع_8}$ د) $\frac{\text{معامل } ع_4}{\text{معامل } ع_6}$

(٦) فى مفكوك $(١ + س)^{١٢}$ إذا كان $ع_3 = ٢ع_2$ فأوجد قيمة س ....

(٧) فى مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ إذا كان $ع_2 = ٢٤٠$ ، $ع_3 = ٧٢٠$ ، $ع_4 = ١٠٨٠$ فأوجد قيمة كلًا من أ ، ب ، ن

(٨) إذا كانت $ع_2 : ع_3$ من مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ تساوى النسبة بين $ع_3 : ع_4$ من مفكوك $(أ + ب)^{ن + ٣}$ فأوجد قيمة ن

(٩) فى مفكوك $(\text{١} + \text{م س})^{\text{ن}}$ إذا كانت $\text{٤ ح}_{\text{٦}} = \text{٧ ح}_{\text{٨}}$ ، $\frac{\text{ح}_{\text{٤}}}{\text{ح}_{\text{٦}}} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}$ ملاحظة وذلك عندما س = ١ فأوجد قيمة كل من م ، ن

(١٠) أوجد عدديًا قيمة اكبر حد فى مفكوك $(\text{٣} - \text{٥س})^{\text{١٥}}$ عندما $\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٥}}$.

(١١) فى مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الثانى وسط حسابى بين الحد الأول والحد الثالث عندما س = ٢ ص فأوجد قيمة ن.

ملخص الوحدة

١ $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن}(\text{ن}-\text{١})(\text{ن}-\text{٢}) \ldots (\text{ن}-\text{ر}+\text{١})$

٢ $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}}$

٣ $\underline{|\text{١}} = \underline{|\text{٠}} = \text{١}$

٤ $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ر}}\ \underline{|\text{ن}-\text{ر}}}$

٥ $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٠}} = \text{١}$

٦ $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}}$

٧ إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ص}}$ فإن س = ص أو س + ص = ن

٨ $\frac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-\text{١}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+\text{١}}{\text{ر}}$

٩ $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-\text{١}} = {}^{\text{ن}+\text{١}}\text{ق}_{\text{ر}}$

١٠ $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}-\text{١}}\text{ق}_{\text{ر}-\text{١}} = \frac{\text{ن}}{\text{ر}}$

١١ $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{١}}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{١}}\,\text{أ} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٢}}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{٢}}\,\text{أ}^{\text{٢}} + \ldots + \text{أ}^{\text{ن}}$

$(\text{س}-\text{أ})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{١}}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{١}}\,\text{أ} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٢}}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{٢}}\,\text{أ}^{\text{٢}} + \ldots + (-\text{أ})^{\text{ن}}$

١٢ $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} + (\text{س}-\text{أ})^{\text{ن}} = \text{٢}$ [مجموع الحدود الفردية الرتبة]

١٣ $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} - (\text{س}-\text{أ})^{\text{ن}} = \text{٢}$ [مجموع الحدود الزوجية الرتبة]

١٤ $(\text{١} \pm \text{س})^{\text{ن}} = \text{١} \pm {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{١}}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٢}}\,\text{س}^{\text{٢}} \pm {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٣}}\,\text{س}^{\text{٣}} + \ldots + (\pm\text{س})^{\text{ن}}$

١٥ الحد العام فى مفكوك $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$ هو $\text{ح}_{\text{ر}+\text{١}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ر}}$

الحد الأوسط فى مفكوك $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$

(أ) إذا كانت ن فردية يوجد حدان أوسطان رتبتاهما $\frac{\text{ن}+\text{١}}{\text{٢}}$ ، $\frac{\text{ن}+\text{٣}}{\text{٢}}$

(ب) إذا كانت ن زوجية يوجد حدٌّ وسط وحيد رتبته $\frac{\text{ن}+\text{٢}}{\text{٢}}$

١٦ النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+\text{١}}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$

١٧ النسبة بين معاملى حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+\text{١}}{\text{ر}} \times \frac{\text{معامل الثانى}}{\text{معامل الأول}}$

تمارين عامة

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) المقدار $^{ن}ل_{ر} : {}^{ن-١}ل_{ر-١} =$

أ ن ب ر ج $\frac{ن}{ر}$ د $\frac{ر}{ن}$

(٢) إذا كان $\underline{|س-٣} \times {}^{س}ل_{٣} = ٢٠ \underline{|س-٢}$ فإن س =

أ صفر ب ٢ ج ٥ د ٤

(٣) إذا كان $^{١٤}ق_{ر٢} = {}^{١٤}ق_{ر+٢}$ فإن ر =

أ ٢ ب ٤ ج ٣ د ٢ أو ٣

(٤) $^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ل_{ر-١} =$

أ ن-ر ب ن - ر - ١ ج ن - ر + ١ د ن + ر

(٥) المقدار $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}$

أ $^{ن+١}ق_{ر}$ ب $^{ن}ق_{ر+١}$ ج $^{ن+١}ق_{ر+١}$ د $^{ن+١}ق_{ر+٢}$

(٦) إذا كان $^{٩}ق_{ر} < {}^{٩}ق_{ر-١}$ فإن

أ $ر < ٤$ ب $ر > ٤$ ج $ر < ٥$ د $ر > ٥$

(٧) إذا كان $^{س+ص}ل_{٢} = ٢١٠$ ، $^{ص-٣}ق_{٣} = ٣٥$ فإن $\underline{|٢س-ص} =$

أ ٥ ب ١٠ ج ٢ د ١

(٨) إذا كان $^{٧}ق_{ر} > ١$ ، $^{ر}ق_{٥} > ١$ فإن قيمة $\underline{|٦-ر} =$ ......

أ صفر ب ١ ج ٧٢٠ د ٦

(٩) من مفكوك $(١+س)^{ن} = ١ + أ_{١}س + أ_{٢}س^{٢} + أ_{٣}س^{٣} + أ_{٤}س^{٤} + ... + أ_{١٠}س^{١٠}$ وكان $\frac{أ_{٢}+أ_{٣}}{أ_{٢}} = ٣$ فإن ن = ...

أ ٤ ب ٦ ج ٨ د ٩

(١٠) إذا كان $١ + \frac{٥}{٢}س + \frac{٥ \times ٤}{٤\,\underline{|٢}}س^{٢} + \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٨\,\underline{|٢}}س^{٣} + ... + \frac{١}{٣٢}س^{٥} = ١٠٢٤$ فإن س = ...

أ ٥ ب ٤ ج ٦ د ٨

(١١) من مفكوك $(أس + ب)^{٢ن+١}$ إذا كان الحدان الأوسطان متساويين عند س = ٢ فإن = ...

أ $أ = ٢ب$ ب $ب = ٢أ$ ج $أب = ٢$ د $أب = \frac{١}{٢}$

ثانيًا : أجب عما يأتى :

(١٢) إذا كان $^{٦}ل_{ر} = ٤ \times {}^{٦}ل_{ر-١}$ ، $\underline{|ن - ر} = ٦$ أوجد كلًّا من ن ، ر

(١٣) إذا كان $^{ن}ق_{ن-٢} = ٤٥$ ، $^{م}ل_{م-٣} = ٤$ أوجد قيمة $^{ن}ق_{م-٢} \div {}^{ن}ق_{م-١}$

(١٤) إذا كان ن (ن-١) (ن-٢) ...... (ن - ر + ١) = ٥٠٤٠ ، $^{ن}ق_{ر} = ٢١٠$ أوجد قيمة $^{ن+١}ق_{٢ر}$.

(١٥) إذا كان $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ ، $^{ن}ق_{ر^{٢}+٢ر} = {}^{ن}ق_{٢ر+٥}$ أوجد قيمة $^{ن}ق_{٧ر+٣}$

(١٦) إذا كان $^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر-١} = ٥ : ٧$ ، $^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ل_{ر-١} = ٥$ أوجد قيمة كل من ن، ر.

(١٧) إذا كان $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} : ٥ \, {}^{ن-١}ق_{ر-٢} = ٧ : ٤ : ٦$ فأوجد قيمتى ن، ر.

(١٨) إذا كان لدينا الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥ فأوجد كم عددًا زوجيًّا أكبر من ٣٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام .
أ) مع الاحلال (التكرار) ب) بدون احلال (بدون تكرار)

(١٩) إذا كان $\underline{|ن} = ٧٢٠$ ، $^{ن+١}ق_{ر} : {}^{ن+١}ق_{ر-١} = \frac{٣}{٥}$ أوجد قيمة $^{ن+١}ق_{ر-٢}$

(٢٠) إذا كان $^{ن+٢}ق_{ر+١} = ٩ \times {}^{ن+١}ق_{ر} = ٩٠ \times {}^{ن}ق_{ر-١}$ أوجد قيمة كل من ن، ر.

(٢١) إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \times {}^{ن}ق_{ر}$ أوجد قيمة $^{١٢}ق_{٢ر}$
ثم احسب أقل قيمة لـ ن

(٢٢) أثبت أن: $^{ن}ق_{١} + (٢ \times {}^{ن}ق_{٢}) + (٣ \times {}^{ن}ق_{٣}) + (٤ \times {}^{ن}ق_{٤}) + ... + (ن \times {}^{ن}ق_{ن}) = ن \times ٢^{ن-١}$

(٢٣) إذا كان $(١ + س)^{١٠} = ١ + {}^{١٠}ق_{١}س + {}^{١٠}ق_{٢}س^{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠}س^{١٠}$ استخدم ذلك فى إيجاد:
أ) $١ + {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠}$
ب) $١ - {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} - ...... + {}^{١٠}ق_{١٠}$
ج) $١ + ٣ \times {}^{١٠}ق_{١} + ٩ \times {}^{١٠}ق_{٢} + ٢٧ \times {}^{١٠}ق_{٣} + ... + (٣)^{١٠}$

(٢٤) فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{ن}$ إذا كان معامل الحد الرابع يساوى معامل الحد الثالث عشر، فأوجد قيمة ن، ثم أوجد رتبة وقيمة الحد الخالى من س.

(٢٥) فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان $(ح_{٣})^{٢} = ح_{٢} \times ح_{٥}$ أوجد قيمة ن عندما س = $\frac{٩}{٥}$

(٢٦) فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان معامل $ح_{١٠}$ هو الوسط الحسابى بين معامل $ح_{٩}$ ، معامل $ح_{١١}$ أوجد كلًّا من:
أ) ن ب) $^{ن}ل_{٣}$ ج) $\underline{|ن - ١٩}$

(٢٧) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ح_{٨} : ح_{٧} : ح_{٦} = ٦ : ١٤ : ٢١$ أوجد قيمة كل من ن ، س

(٢٨) إذا كانت النسبة بين ثلاثة حدود متتالية فى مفكوك $(س + \frac{ك}{س^{٢}})^{٢٧}$ كنسبة ١٥ : ٦ : ٢ حيث $ك \in ص^{+}$ فأوجد رتب هذه الحدود ثم أوجد رتبة وقيمة الحد الخالى من س فى هذا المفكوك.

(٢٩) فى مفكوك $(١ + م س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان الحدان الثانى والثالث هما على الترتيب $\frac{-١٠}{٣}$س ، ٥$س^{٢}$ أوجد قيمة م ، ن ثم احسب قيمة الحد الأوسط من هذا المفكوك عندما س = ٣

(٣٠) إذا كانت رتبة الحد الخالى من س فى مفكوك $(٢س^{٢} - \frac{٣}{س})^{٢١}$ تساوى رتبة الحد الخالى من س من مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٢ن}$ أوجد قيمة ن ثم أوجد النسبة بين الحدين الأوسطين من المفكوك الأول عندما س = -١ .

(٣١) فى مفكوك $(٤س^{٢} + \frac{١}{٢س})^{١٣}$ أوجد معامل $س^{٥}$ ثم أوجد قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين من هذا المفكوك متساويين ثم أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س فى هذا المفكوك .

(٣٢) إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ على الترتيب هى ١٥، ٢٤، ٢٨ حسب قوى س التصاعدية، فما قيمة ن ورتب هذه الحدود؟

(٣٣) إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(١ + س)^{١٠}$ يساوى ضعف الحد السابع أوجد قيمة س

(٣٤) إذا كان مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{ن}$ يحتوى على حد خالٍ من س فأثبت أن ن مضاعف للعدد ٣ ، ثم أوجد قيمة هذا الحد عندما ن = ١٢.

(٣٥) إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(٢س + ٣)^{١٧}$ متساويين فيما قيمة س؟

(٣٦) إذا كان أ ، ب هما الحدان الأوسطان فى مفكوك $(س - \frac{١}{س})^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية فأثبت أن أ + ب $س^{٢}$ = ٠

(٣٧) إذا كانت نسبة معامل الحد السادس إلى معامل الحد الرابع فى مفكوك $(\frac{٣}{٢} + \frac{٢س}{٣})^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية يساوى ٨ : ٢٧ فما قيمة ن.

(٣٨) أوجد قيمة س التى تجعل الحد الثالث فى مفكوك $(٢س^{٢} + \frac{١}{٢})^{٧}$ حسب قوى س التنازلية مساويًا الحد السادس.

(٣٩) إذا كان $ح_{٤} = \frac{٢٥}{٣} ح_{٢}$ ، $ح_{٥} = ح_{٦}$ من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية فأوجد قيم كل من ن، س

(٤٠) إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا وكان: $(١ + جـ س)^{ن} = ١ + م_{١} س + م_{٢} س^{٢} + م_{٣} س^{٣} + م_{٤} س_{٤} + ..$ وكان $م_{١} = ١٢$ ، $م_{٤} = ٤م_{٣}$ أوجد قيمة كل من ن، جـ

(٤١) إذا كانت الحدود: الثالث والرابع والخامس فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ على الترتيب حسب قوى س التنازلية هى ١١٢ ، ٤٤٨ ، ١١٢٠، فأوجد قيمة كل من س، ص ، ن.

(٤٢) أوجد فى مفكوك $(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س^{٢}})^{١٢}$. **كلًا من** : الحد الأوسط و الحد المشتمل على $س^{٣}$

(٤٣) أوجد الحد الخالى من س فى مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٦} - (س - \frac{١}{س})^{٦}$

٤٤ فى مفكوك $(٢س + \frac{٣}{س^{٢}})^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد التاسع والعاشر متساويين وكانت النسبة بين الحد السادس والحد السابع كنسبة ٨ : ١٥، فأوجد قيمة ن وأثبت أن المفكوك لا يحتوى على حد خالٍ من س

٤٥ فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{جـ}{س^{٣}})^{١٥}$ أوجد قيمة جـ التي تجعل معامل $س^{١٠}$ ضعف معامل $س^{١٥}$

٤٦ فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{١٥}$ أوجد النسبة بين الحد الخالى من س ومجموع معاملى الحدين الأوسطين.

٤٧ فى مفكوك $(س^{ك} + \frac{١}{س})^{٨}$ حيث ك عدد صحيح موجب أوجد :

أ قيم ك التى تجعل للمفكوك حدًّا خاليًا من س

ب النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط وذلك لأكبر قيم ك التى حصلت عليها فى أولًا.

٤٨ إذا كان : $(١ + س)^{ن} = ا_{.} + ا_{١} س + ا_{٢} س^{٢} + .. ا_{ن} س^{ن}$ فأثبت أن :

أ $\frac{ا_{١}}{ا_{.}} + \frac{٢ا_{٢}}{ا_{١}} + \frac{٣ا_{٣}}{ا_{٢}} + .. + \frac{ن ا_{ن}}{ا_{ن-١}} = \frac{ن}{٢} (ن + ١)$

ب $ا_{.} + ٢ا_{١} + ٤ا_{٢} + ٨ا_{٣} + .. + ٢^{ن} ا_{ن} = ٣^{ن}$

٤٩ إذا كان الحد الثالث فى مفكوك $(٢س + \frac{١}{س^{٢}})^{ن}$ حسب قوى س التنازلية خاليًا من س فأوجد قيمة ص التى تجعل هذا الحد مساويًا للحد الثانى فى مفكوك $(١ + ص^{٣})^{٣٠}$

٥٠ فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{اس})^{٨}$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوى معامل الحد الذى يحتوى على $س^{١٠}$ فأوجد قيمة ا.

٥١ فى مفكوك $(س^{٢} - \frac{١}{س})^{١٤}$ أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س ، ثم أوجد النسبة بين الحد السابع والحد السادس فى هذا المفكوك عندما $س = -١$

٥٢ فى مفكوك $(٩س^{٢} + \frac{١}{٣س})^{٩}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س ، ثم أثبت أن الحدين الأوسطين متساويان عندما $س = \frac{١}{٣}$

٥٣ فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{٩}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س ، وإذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س والحد السادس تساوى ٩:٤ ، فأوجد قيمة س الحقيقية.

٥٤ فى مفكوك $(س٢ + \frac{١}{س})^{٣ن}$ أوجد معامل $س^{٣ن}$ ، وإذا كانت ن = ٦ فأوجد النسبة بين معامل $س^{٣ن}$ ومعامل الحد الأوسط.

لمزيد من الأنشطه والتدريبات زيارة الموقع الالكترونى www.sec3mathematics.com.eg

اختبار تراكمي

(١) في مفكوك $(١ + س)^{١٧}$ إذا كان معامل $ح_{ر+٤}$ = معامل $ح_{٢ر+٣}$ فإن ر = ...

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ١٧ د) ٧

(٢) في مفكوك $(١ + س)^{٢٧}$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين = ١:٣ فإن س = ...

أ) ٤ ب) ٣ جـ) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{١}{٤}$

(٣) المقدار $(\sqrt{٢} + ١)^{٥} - (\sqrt{٢} - ١)^{٥}$ = ...

أ) -٨٢ ب) ٨٢ جـ) $٥٨\sqrt{٢}$ د) $-٥٨\sqrt{٢}$

(٤) الحد الرابع في مفكوك $(\frac{س}{٣} + \frac{٣}{س})^{٦}$ هو:

أ) ٢٠ س ب) $\frac{٢٠}{س}$ جـ) ٢٠ د) ٢٠ $س^{٢}$

(٥) الحد الأخير من مفكوك $(٢ - س)^{٥}(٢ + س)^{٥}$ هو ......

أ) س٥ ب) $-س^{٥}$ جـ) $-س^{١٠}$ د) $س^{١٠}$

(٦) في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ أثبت أن $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$ س، و إذا كان معامل $ح_{١٣}$ حسب قوى س التصاعدية في هذا المفكوك يساوي معامل $ح_{١٤}$ فأوجد قيمة ن و إذا كان $\frac{ح_{٧}}{ح_{٥}} = \frac{٧}{٨}$ أوجد قيمة س

(٧) أ) إذا كان $^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{٣} = ن^{٢} + ٦ن + ٥$ أوجد قيمة ن .

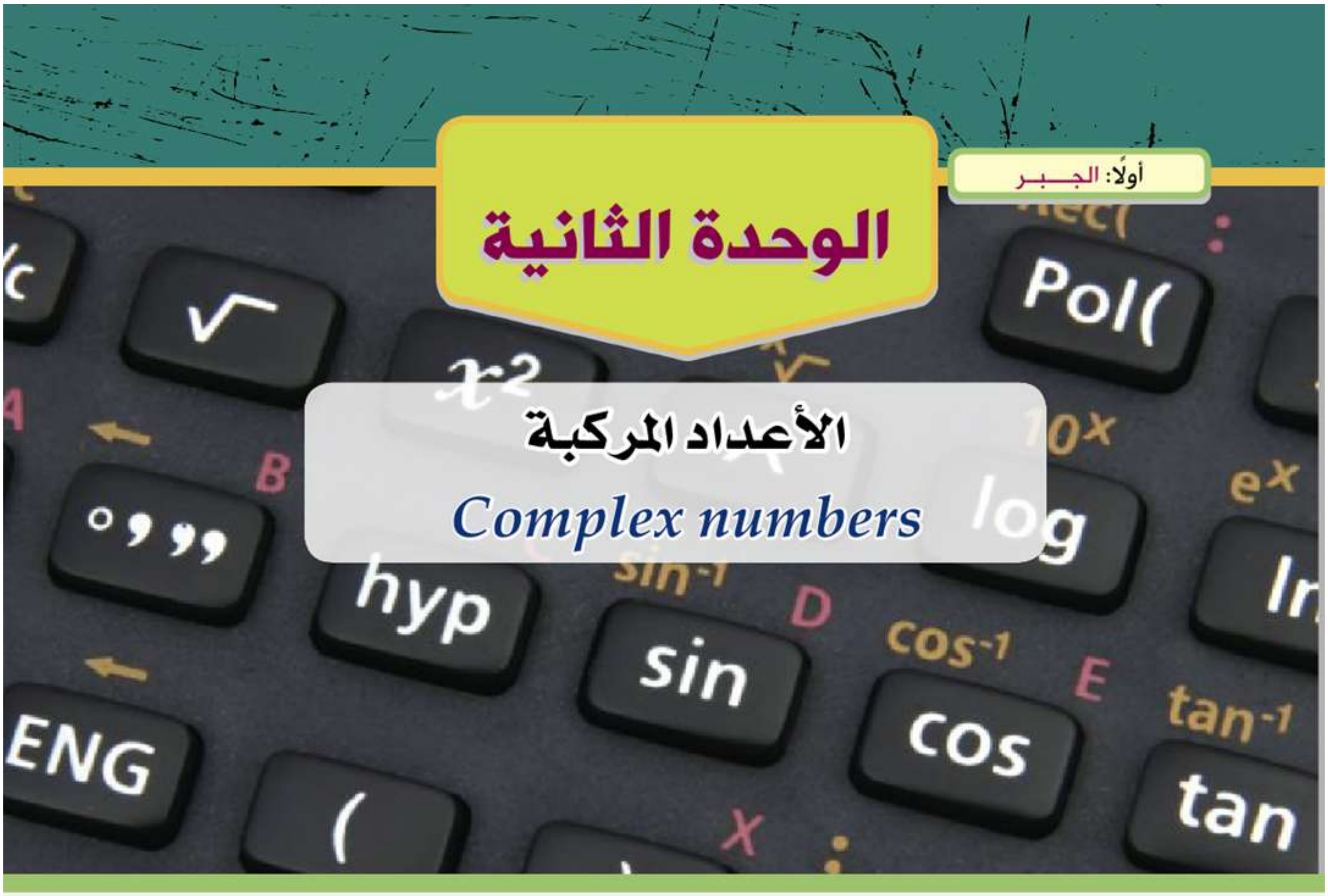
ب) أوجد قيمة الحد الخالي من س في مفكوك $(\frac{١}{س^{٢}})(س + \frac{١}{س^{٣}})^{١٠}$

(٨) في مفكوك $(١ - م س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان الحد الثاني = $\frac{-١}{٤}$ س وكان الحد الثالث $\frac{٣}{١٠٠}$ $س^{٢}$ أوجد قيمة كل من م، ن.

(٩) من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥} أوجد كم عدد يمكن تكوينه بحيث يكون اقل من ٤٠٠ .

أولاً: مع الاحلال (التكرار) ثانيًا: بدون احلال (بدون تكرار) .

(١٠) إذا كانت النسبة بين الحدود الخامس والسادس والسابع في مفكوك $(\frac{٣س}{٢} + \frac{٢}{٣س})^{ن}$ حسب قوى س التنازلية هي ٤٠ : ٢٤ : ١١ ، أوجد كلًّا من ن، س



الوحدة الثانية

الأعداد المركبة

Complex numbers

مقدمة الوحدة

يعد (جان روبير أرجاند) من أعلام الرياضيين البارزين، وهو أول من درس الأعداد المركبة complex numbers تفصيليًا واستخدمها فى إثبات أن لجميع المعادلات الجبرية جذورًا سواء حقيقية أم تخيلية، وتمثل الأعداد المركبة بالشكل أو المخطط المعروف بمخطط Argand Diagram تكريمًا للعالم الفرنسى أرجاند، إما بنقطة (س، ص) حيث س العدد الحقيقى على المحور السينى، وتمثل ص العدد التخيلى على المحور الصادى أو بكمية متجهه (Vector) مقدارها يساوى $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ واتجاهها $ظا^{-١} \frac{ص}{س}$. كما ستتعرف فى هذه الوحدة علي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح وحل تطبيقات على الأعداد المركبة التى تدخل فى حياتنا كالكهرباء والديناميكا والنظرية النسبية ، وميادين الفيزياء المختلفة ، وهذه الأعداد هى أعداد مرنة لها القدرة على الوصول إلى النتيجة النهائية بشكل مرض.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن يكون قادرًا على أن:

- يمثل العدد المركب ومرافقه بيانيًا بنقاط (أزواج مرتبه) فى مستوى إحداثى
- يحدد المقياس والسعة للعدد المركب.
- يتعرف السعة الأساسية للعدد المركب.
- يتعرف الصور المثلثية للعدد المركب.
- يتعرف نظرية ديموافر وتطبيقاتها.
- يستنتج الجذور النونية لأى عدد مركب.
- يعبر عن جا ن θ، جتا ن θ بدلالة النسب المثلثية للزاوية ومضاعفاتها.
- يتعرف مفكوك جا θ، وجتا θ كمتسلسلات.
- يستنتج قانون أويلر من خلال المتسلسلات.
- يتعرف ويطبق طرق التحويل بين الصور المختلفة للعدد المركب.
- يتعرف الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- يتعرف المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين ولخارج قسمتهما.
- يجرى العمليات الأساسية على العدد المركب فى الصورة المثلثية.
- يحل تطبيقات على الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- يستخدم الأعداد المركبة فى حل المشكلات الرياضية.
- يستخدم بعض برامج الحاسوب فى حل مشكلات رياضية تتضمن أعدادًا مركبة.
- يستنتج خواص عمليتى الجمع والضرب على الأعداد المركبة.
- يستنتج خواص العددين المترافقين.
- يستنتج خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

مصطلحات أساسية

- مستوى أرجاند — Argand plane
- مرافق — conjugate
- مقياس — Modulus
- سعة أساسية — principle omplitude
- صور مثلثة — Trigonmetric form
- نظرية ديموافر — De Moivre's thearem
- جذر — root
- جذر تربيعي — square root
- جذر تكعيبي — cubic root
- دائرة الوحدة — Unit circle
- قطبي — Polar

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

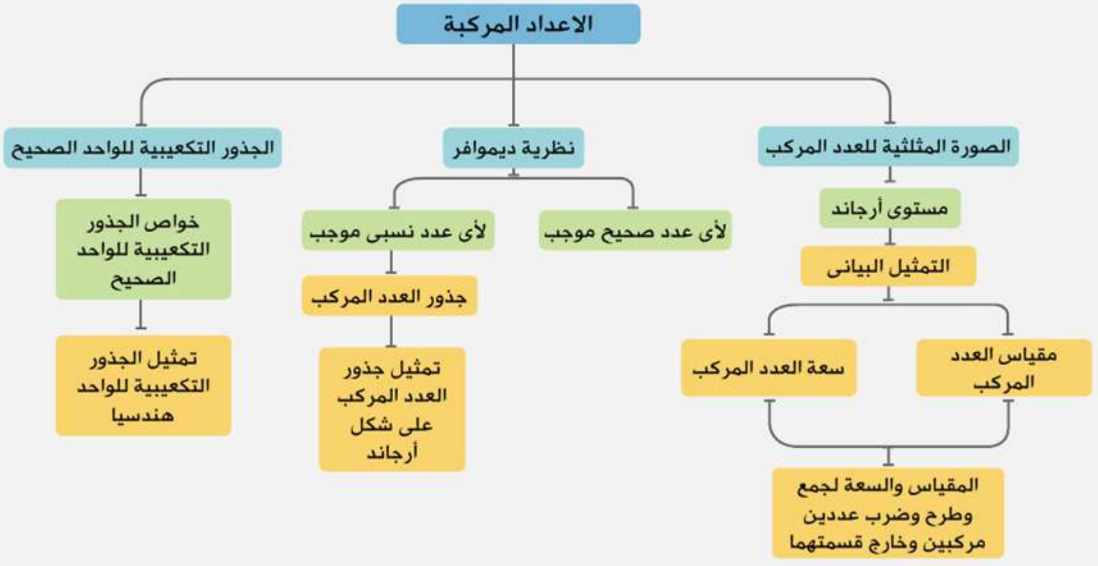
دروس الوحدة

الدرس (٢-١): الصورة المثلثية للعدد المركب

الدرس (٢-٢): نظرية ديموافر

الدرس (٢-٣): الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

مخطط تنظيمي للوحدة



الوحدة الثانية

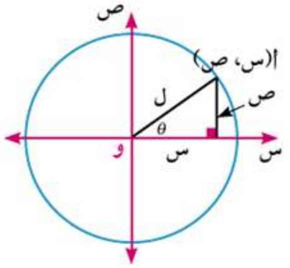
٢ - ١ الصورة المثلثية للعدد المركب

Polar form of a complex number

سبق أن درست الأعداد المركبة، وعلمت أن العدد المركب يمكن كتابته على الصورة ع = س + ص ت (الصورة الجبرية)، حيث س ، ص عددان حقيقيان ، $ت^٢ = -١$ و في هذا الدرس سوف نتعرف على صورة أخرى لكتابة العدد المركب، وكيفية تمثيله بيانيًا.

الإحداثيات القطبية والديكارتية:

الشكل المقابل يمثل دائرة طول نصف قطرها ل، أ (س ، ص) تقع على الدائرة وتقابل زاوية θ .



جتاθ = $\frac{س}{ل}$ ، جاθ = $\frac{ص}{ل}$

س = ل جتا θ ، ص = ل جاθ

حيث ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ، ظاθ = $\frac{ص}{س}$ أى أن:

θ = ظا$^{-١}$ $\frac{ص}{س}$ و إذا تأملنا المستوى الديكارتى على أنه مستوى قطبى بحيث ينطبق المحور القطبى على الجزء الموجب لمحور السينات فإنه يمكننا تحويل الإحداثيات القطبية إلى ديكارتية والعكس .

تحويل الإحداثيات القطبية إلى احداثيات ديكارتية

إذا كانت النقطة أ فى الإحداثيات القطبية هى (ل، θ) فإن الإحداثيات الديكارتية لنفس النقطة هى (س، ص) حيث :

س = ل جتاθ ، ص = ل جاθ

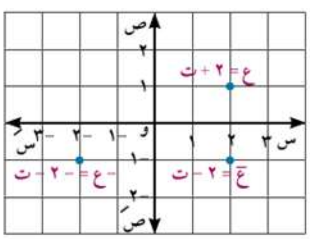
ويكون: (س، ص) = (ل جتاθ ، ل جا θ)

مستوى أرجاند

قام العالم الرياضى **"أرجاند"** بتمثيل العدد المركب ع بيانيًا على مستوى إحداثيات متعامدة، وجعل المحور الأفقى $\overleftrightarrow{س س'}$ يمثل الجزء الحقيقى من العدد المركب وجعل المحور الرأسى $\overleftrightarrow{ص ص'}$ يمثل الجزء التخيلى من العدد المركب. فتكون النقطة التى إحداثيها (س، ص) تمثل العدد المركب س + ت ص

مثال

(١) فى شكل أرجاند المجاور نلاحظ أن النقطتين اللتين تمثلان العددين ع ، - ع متماثلتان بالنسبة لنقطة الأصل (و).



سوف تتعلم

- التمثيل البيانى للعدد المركب ومرافقة فى مستوى أرجاند.
- التمثيل البيانى لمجموع عددين مركبين.
- مقياس العدد المركب.
- سعة العدد المركب.
- السعة الأساسية للعدد المركب.
- الصورة المثلثية للعدد المركب.
- المقياس و السعة لحاصل ضرب عددين مركبين وخارج قسمتهما.

مصطلحات أساسية

- مستوى أرجاند *Argand plane*
- مرافق *Conjugate*
- مقياس *Modulus*
- سعة أساسية *Principle amplitude*
- صورة مثلثية *Trigonmetric form*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*

كذلك نلاحظ أن النقطتين اللتين تمثلان العددين المترافقين ع، $\overline{ع}$ متماثلتان بالنسبة للمحور $\overleftrightarrow{سس'}$

حاول أن تحل

(١) مَثِّل على شكل أرجاند كل من الأعداد:

ع = ٣ + ٤ت ، $\overline{ع}$ ، -ع ، ١ + ع

تفكير ناقد: ما الذى تمثله جميع الأعداد المركبة ع التى جزءها الحقيقى يساوى ٢ على شكل أرجاند.

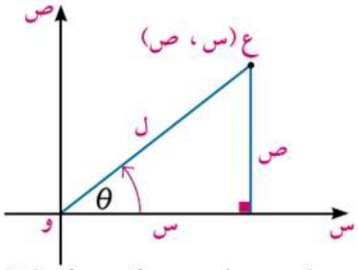
تعلم أ

حيث $\frac{-\pi}{٢} <$ ظا$^{-١}$ $\frac{\pi}{٢}$

المقياس والسعة للعدد المركب *The modulus and the amplitude (argument) of a complex number*

إذا كان ع = س + ص ت عددًا مركبًا تمثله نقطة ع(س ، ص) فى مستوى أرجاند، فإن مقياس العدد ع هو بُعده عن نقطة الأصل و . و يرمز لمقياس العدد ع بالرمز |ع| أو ل وتسمى θ بسعة العدد المركب، و يكون:

ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ، ظاθ = $\frac{ص}{س}$ أن أى θ = ظا$^{-١}$ $\frac{ص}{س}$



الصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب *Polar form of a complex number*

إذا كان ع = س + ص ت عددًا مركبًا مقياسه ل وسعته الأساسية θ حيث $\theta \in$] -π، π[فإنه يكتب بالصورة ع = ل (جتا θ + ت جا θ) و يتحدد قياس θ تبعًا للحالات الآتية:

(أ) س > ٠ ، ص > ٠ فإن θ تقع فى الربع الأول θ = ظا$^{-١}$ $(\frac{ص}{س})$

(ب) س < ٠ ، ص > ٠ فإن θ تقع فى الربع الثانى $\theta = \pi$ + ظا$^{-١}$ $(\frac{ص}{س})$

(ج) س < ٠ ، ص < ٠ فإن θ تقع في الربع الثالث $\theta = -\pi$ + ظا$^{-١}$ $(\frac{ص}{س})$

(د) س > ٠ ، ص < ٠ فإن θ تقع فى الربع الرابع θ = ظا$^{-١}$ $(\frac{ص}{س})$

لاحظ أن

س > ٠، ص = ٠ فإن θ = ٠

س < ٠، ص = ٠ فإن $\theta = \pi$

س = ٠ ، ص > ٠ فإن $\theta = \frac{\pi}{٢}$

س = ٠ ، ص < ٠ فإن $\theta = \frac{-\pi}{٢}$

مثال

(٢) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

(أ) $ع_١$ = -$\sqrt{٣}$ + ت (ب) $ع_٢$ = -١ - ت

الحل

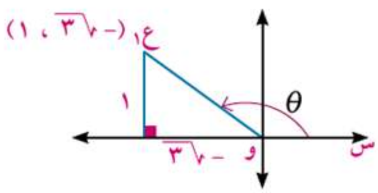
∵ صورة العدد المركب هى : ع = س + ت ص فإن :

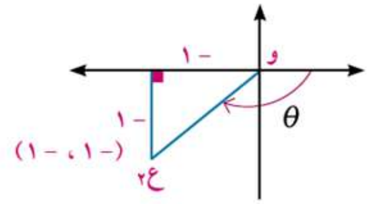
(أ) س = -$\sqrt{٣}$ ، ص = ١

∴ العدد $ع_١$ يقع فى الربع الثانى

ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{(-\sqrt{٣})^٢ + (١)^٢}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

$\theta = \pi$ + ظا$^{-١}$ $(\frac{-١}{\sqrt{٣}})$ = $\pi - \frac{\pi}{٦}$ = $\frac{٥\pi}{٦}$





ب) س = -١ ، ص = -١

∴ العدد ع٢ يقع فى الربع الثالث

$ل = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{(-١)^2 + (-١)^2} = \sqrt{٢}$

$\theta = -\pi + ظا^{-1}(\frac{-١}{-١}) = -\pi + \frac{\pi}{٤} = \frac{-٣\pi}{٤}$

حاول أن تحل

٢) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) $ع_1 = \sqrt{٢} + \sqrt{٢}$ ت ب) $ع_2 = ١ - \sqrt{٣}$ ت

ج) $ع_3 = -\sqrt{٣}$ ت د) $ع_4 = ٥$

تذكر أن

$\frac{\theta^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{\theta^د}{\pi}$

ويستخدم هذا القانون للتحويل من قياس ستينى إلى قياس دائرى والعكس.

خواص المقياس والسعة لعدد مركب

لكل عدد مركب ع = س + ص ت و سعته θ يكون:

١) |ع| ⩾ صفر

٢) سعة العدد المركب تأخذ عددًا غير منتهٍ من القيم، وذلك بإضافة عدد صحيح من دورات ٢π.
أى إن سعة العدد المركب تساوى $\theta + ٢\pi$ ن حيث ن عدد صحيح.

٣) |ع| = |$\bar{ع}$| = |-ع| = |$-\bar{ع}$| حيث $\bar{ع}$ هو مرافق العدد ع

٤) ع $\bar{ع}$ = |ع|^2 = |$\bar{ع}$|^2

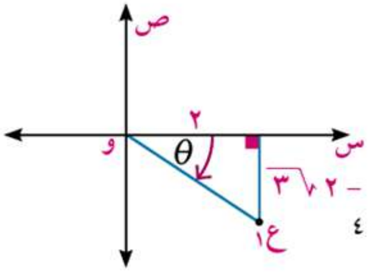
تفكير ناقد: إذا كانت السعة الأساسية للعدد ع هى θ فأوجد السعة الأساسية لكل من الأعداد -ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$

مثال

٣) اكتب كلًّا من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية:

أ) $ع_1 = ٢ - ٢\sqrt{٣}$ ت ب) $ع_2 = -٤$ت ج) $ع_3 = \frac{-٤}{\sqrt{٣} + ت}$ د) $ع_4 = -٢$

الحل



∵ صورة العدد المركب هى : س + ت ص لذلك فإن:

أ) س = ٢ ، ص = $-٢\sqrt{٣}$

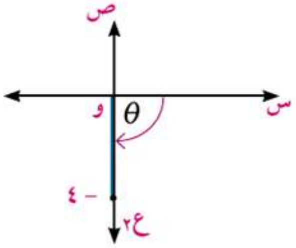
∴ $ع_1$ يقع فى الربع الرابع

$ل = |ع_1| = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{(٢)^2 + (-٢\sqrt{٣})^2} = \sqrt{١٦} = ٤$

$\theta = ظا^{-1}(\frac{-٢\sqrt{٣}}{٢}) = \frac{-\pi}{٣}$

∴ $ع_1$ = ل (جتا θ + ت جا θ)

= ٤ (جتا$(\frac{-\pi}{٣})$ + ت جا$(\frac{-\pi}{٣})$)

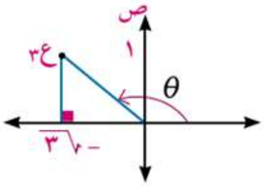


(ب) ∵ س = ٠ ، ص = -٤

∴ ع٢ يقع على محور ص

ل = |ع٢| = √(س^٢ + ص^٢) = √((٠)^٢ + (-٤)^٢) = ٤

θ = $\frac{-\pi}{٢}$ ، ع٢ = ٤(جتا($\frac{-\pi}{٢}$) + ت جا($\frac{-\pi}{٢}$))



(ج) ع٣ = $\frac{-٤}{\sqrt{٣} + ت} \times \frac{\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} - ت}$ = -√٣ + ت

س = -√٣ ، ص = ١ ∴ ع٣ تقع فى الربع الثانى

ل = |ع٣| = √(س^٢ + ص^٢) = √(٣ + ١) = ٢

θ = π + ظا^-١ $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{٥\pi}{٦}$

ع٣ = ٢ (جتا $\frac{٥\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٦}$)

تذكر أن

- ١ = جتا ٠ + ت جا ٠
- -١ = جتا π + ت جا π
- ت = جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$
- -ت = جتا $\frac{-\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٢}$

(د) ∵ س = -٣ ، ص = ٠ ∴ ع٤ يقع على محور س

ل = |ع| = √((-٣)^٢ + (٠)^٢) = ٣

θ = π ∴ ع٤ = ٣(جتا π + ت جا π)

حاول أن تحل

(٣) اكتب كلًّا من الأعداد الآتية فى الصورة المثلثية:

(أ) ع١ = ٨ (ب) ع٢ = ٥ت (ج) ع٣ = -٣ - ٣ت

مثال

تذكر أن

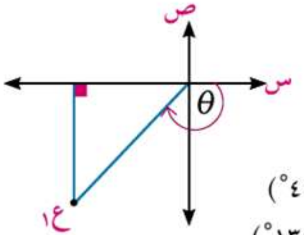
جتاθ - ت جاθ = جتا(-θ) + ت جا(-θ)

(٤) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد الآتية:

(أ) ع١ = -٨ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

(ب) ع٢ = ٢ (جا $\frac{٤}{٣}$π - ت جتا $\frac{٤}{٣}$π)

الحل



(أ) ع١ = -٨ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

= ٨(- جتا ٤٥° - ت جا ٤٥°)

∵ س < صفر ، ص < صفر ∴ ع١ يقع فى الربع الثالث

∵ - جتا ٤٥° = جتا(١٨٠° + ٤٥°) ، - جا ٤٥° = جا(١٨٠° + ٤٥°)

∴ ع١ = ٨(جتا ٢٢٥° + ت جا ٢٢٥°) = ٨(جتا -١٣٥° + ت جا -١٣٥°)

∴ مقياس العدد ع١ = ٨ ، السعة الأساسيةθ = -١٣٥°

ب) $ع_٢ = ٢ (جا \frac{٤}{٣} \pi - ت جتا \frac{٤}{٣} \pi)$

$\because$ س < ٠ ، ص < ٠

$\because$ $جا \frac{٤}{٣} \pi = جتا (\frac{٣\pi}{٢} + \frac{٤}{٣}\pi) = جتا \frac{١٧}{٦}\pi = جتا (\frac{٥\pi}{٦})$

$- جتا \frac{٤}{٣} \pi = جا (\frac{٣\pi}{٢} + \frac{٤}{٣}\pi) = جا (\frac{١٧}{٦}\pi) = جا (\frac{٥\pi}{٦})$

$\therefore$ $ع_٢ = ٢(جتا \frac{٥\pi}{٦} + ت جا \frac{٥\pi}{٦})$

$\therefore$ مقياس العدد $ع_٢ = ٢$، السعة الأساسية $\frac{٥\pi}{٦}$

تذكر أن

$جا (\frac{\pi}{٢} + \theta) = جتا \theta$

$جتا (\frac{\pi}{٢} + \theta) = - جا \theta$

$جا (\frac{٣\pi}{٢} + \theta) = - جتا \theta$

$جتا (\frac{٣\pi}{٢} + \theta) = جا \theta$

حاول أن تحل

٤) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) $ع_١ = ٢ (جتا \frac{\pi}{٣} - ت جا \frac{\pi}{٣})$ ب) $ع_٢ = \frac{-١}{\sqrt{٢}} (جا ٤٥° - ت جا ٤٥°)$

تعلم ٣

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية

multiplying and dividing complex numbers using the polar form

إذا كان $ع_١ = ل_١(جتا \theta_١ + ت جا \theta_١)$ ، $ع_٢ = ل_٢(جتا \theta_٢ + ت جا \theta_٢)$ فإن

١) $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ (جتا \theta_١ + ت جا \theta_١) (جتا \theta_٢ + ت جا \theta_٢)$

$= ل_١ ل_٢ (جتا(\theta_١ + \theta_٢) + ت جا(\theta_١ + \theta_٢))$ (١)

أي إن $|ع_١ ع_٢| = ل_١ ل_٢ = |ع_١||ع_٢|$

سعة $(ع_١ ع_٢) = \theta_١ + \theta_٢$

٢) $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} \times \frac{جتا \theta_١ + ت جا \theta_١}{جتا \theta_٢ + ت جا \theta_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} (جتا (\theta_١ - \theta_٢) + ت جا(\theta_١ - \theta_٢))$ (٢)

أي إن $|\frac{ع_١}{ع_٢}| = \frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{|ع_١|}{|ع_٢|}$ ، سعة $(\frac{ع_١}{ع_٢}) = \theta_١ - \theta_٢$

استعن بمعلمك لإثبات صحة العلاقات (١) ، (٢)

مثال

٥) عَبِّر عن $٣ (جتا \frac{٥\pi}{١٢} + ت جا \frac{٥\pi}{١٢}) \times ٤ (جتا \frac{\pi}{١٢} + ت جا \frac{\pi}{١٢})$ بالصورة س + ص ت

الحل

$٣ (جتا \frac{٥\pi}{١٢} + ت جا \frac{٥\pi}{١٢}) \times ٤(جتا \frac{\pi}{١٢} + ت جا \frac{\pi}{١٢})$

$= ٣ \times ٤((جتا \frac{٥\pi}{١٢} + \frac{\pi}{١٢}) + ت جا(\frac{٥\pi}{١٢} + \frac{\pi}{١٢}))$

$= ١٢ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢}) = ١٢(٠ + ت (١)) = ١٢ ت$

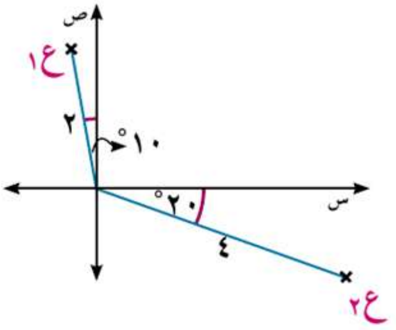
حاول أن تحل

٥) عبر عن $٢(\text{جتا}\frac{\pi}{١٥} + \text{ت جا}\frac{\pi}{١٥}) \times ٣(\text{جتا}\frac{-٢\pi}{٥} + \text{ت جا}\frac{-٢\pi}{٥})$ بالصورة س + ت ص

مثال

٦) إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين ممثلين على مستوى أرجاند كما بالشكل المقابل، أوجد على الصورة س + ص ت العدد $\frac{ع_٢}{ع_١}$

الحل



من الرسم $|ع_١| = ٢$ ، سعة $ع_١ = ٩٠° + ١٠° = ١٠٠°$

$\therefore ع_١ = ٢(\text{جتا } ١٠٠° + \text{ت جا } ١٠٠°)$

$|ع_٢| = ٤$ ، سعة $ع_٢ = -٢٠°$

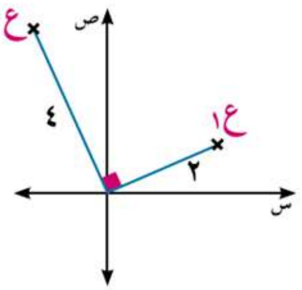
$\therefore ع_٢ = ٤(\text{جتا }(-٢٠°) + \text{ت جا }(-٢٠°))$

$\therefore \frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{٤}{٢} \times \frac{\text{جتا}(-٢٠°) + \text{ت جا}(-٢٠°)}{(\text{جتا}١٠٠° + \text{ت جا}١٠٠°)}$

$= ٢ [\text{جتا}(-٢٠° - ١٠٠°) + \text{ت جا}(-٢٠° - ١٠٠°)]$

$= ٢ (\text{جتا}(-١٢٠°) + \text{ت جا }(-١٢٠°))$

$= ٢ (-\frac{١}{٢} - \text{ت} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}) = -١ - \sqrt{٣}\text{ ت}$



حاول أن تحل

٦) باستخدام مستوى أرجاند المقابل، أوجد $\frac{ع_٢}{ع_١}$ على الصورة س + ص ت

نتائج:

١) إذا كان $ع = ل(\text{جتا }\theta + \text{ت جا }\theta)$ فإن

(أ) $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل} (\text{جتا }(-\theta) + \text{ت جا }(-\theta))$ (ب) $ع^٢ = ل^٢(\text{جتا }٢\theta + \text{ت جا }٢\theta)$

٢) يمكن تعميم حاصل ضرب عدد محدود من الأعداد المركبة فإذا كان $ع_١$، $ع_٢$، ... $ع_ن$ أعدادًا مركبة وكان:

$ع_١ = ل_١(\text{جتا}\theta_١ + \text{ت جا}\theta_١)$ ، $ع_٢ = ل_٢(\text{جتا}\theta_٢ + \text{ت جا}\theta_٢)$، .... ،$ع_ن = ل_ن(\text{جتا}\theta_ن + \text{ت جا}\theta_ن)$

فان: $ع_١ ع_٢ ..... ع_ن = ل_١ ل_٢ ..... ل_ن(\text{جتا }(\theta_١ + \theta_٢ + ... + \theta_ن) + \text{ت جا }(\theta_١ + \theta_٢ + ... + \theta_ن))$

وفى الحالة الخاصة عندما $ع_١ = ع_٢ = ... = ع_ن = ل(\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta)$ يكون:

$$ع^ن = ل^ن(\text{جتا ن}\theta + \text{ت جا ن}\theta)$$

مثال

٧) ضع العدد ١- ت على الصورة المثلثية، ثم أوجد $(١ - \text{ت})^٨$

الحل

∵ $س = ١$ ، $ص = -١$ $\qquad$ $ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{١^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{٢}$

∵ $س > ٠$ ، $ص < ٠$ $\qquad$ ∴ ع يقع فى الربع الرابع

$\theta = ط^{-١}(\frac{-١}{١}) = \frac{-\pi}{٤}$ ∴ $١ - ت = \sqrt{٢}$ (جتا $\frac{-\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٤}$)

∴ $(١ - ت)^٨ = (\sqrt{٢})^٨$ (جتا$(\frac{-\pi}{٤})$ + ت جا $(\frac{-\pi}{٤})$)^٨

= ١٦ (جتا (-٢π) + ت جا (-٢π))

= ١٦ (جتا ٠ + ت جا ٠) = ١٦

حاول أن تحل

(٧) إذا كان $ع_١ = ٢$(جتا $١٠°$ + ت جا $١٠°$) ، $ع_٢ = ٣$(جتا $٤٠°$ + ت جا $٤٠°$)

أوجد العدد $ع_١^٤ \ ع_٢^٢$ على الصورة س + ص ت

الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر) *Exponential form of a complex number (Euler form)*

كل دالة فى المتغير س يمكن التعبير عنها كمتسلسلة من قوى س تسمى متسلسلة تايلور (Taylor series) وفيما يلى نورد مفكوك تايلور لبعض الدوال محل الدراسة فى هذه الوحدة.

١) دالة الجيب ص = جا س

$$جا\ س = \frac{س}{\underline{|١}} - \frac{س^٣}{\underline{|٣}} + \frac{س^٥}{\underline{|٥}} - ...... + (-١)^ن \times \frac{س^{٢ن+١}}{\underline{|٢ن+١}} + ...$$

(دالة الجيب دالة فردية جا(- س) = - جا س لذلك المفكوك يحتوى على قوى س الفردية)

٢) دالة جيب التمام ص = جتا س

$$جتا\ س = ١ - \frac{س^٢}{\underline{|٢}} + \frac{س^٤}{\underline{|٤}} - ...... + (-١)^ن \times \frac{س^{٢ن}}{\underline{|٢ن}} + ...$$

(دالة جيب التمام هى دالة زوجية لأن جتا(- س) = جتا س لذلك المفكوك يحتوى على قوى س الزوجية)

٣) الدالة الأسية $ص = هـ^س$

$$هـ^س = ١ + \frac{س}{\underline{|١}} + \frac{س^٢}{\underline{|٢}} + \frac{س^٣}{\underline{|٣}} + ... + \frac{س^ن}{\underline{|ن}} + ...$$

لاحظ أن

$$هـ^{ت س} = ١ + \frac{ت س}{\underline{|١}} + \frac{ت^٢ س^٢}{\underline{|٢}} + \frac{ت^٣ س^٣}{\underline{|٣}} + ... + \frac{ت^ن س^ن}{\underline{|ن}} + ...$$

$$= ١ + \frac{ت س}{\underline{|١}} - \frac{س^٢}{\underline{|٢}} - \frac{ت س^٣}{\underline{|٣}} + ...$$

$$= (١ - \frac{س^٢}{\underline{|٢}} + \frac{س^٤}{\underline{|٤}} - ......) + ت (\frac{س}{\underline{|١}} - \frac{س^٣}{\underline{|٣}} + ...)$$

$$هـ^{ت س} = جتا\ س + ت\ جا\ س$$

أضف إلى معلوماتك

معادلة أويلر $هـ^{\pi ت} + ١ = صفر$ و هى تربط بين أشهر ٥ ثوابت.

فى صورة أويلر θ يجب أن يكون بالتقدير الدائرى.

أى إن العدد المركب ع = س + ت ص = ل(جتاθ + ت جاθ) يمكن كتابته على الصورة:

$ع = ل\ هـ^{\theta ت}$ وتسمى صورة أويلر حيث θ بالتقدير الدائرى.

مثال

(٨) اكتب كلًّا من الأعداد المركبة الآتية على الصورة الأسية (صورة أويلر):

(أ) $ع_١ = ١ + ت$ (ب) $ع_٢ = -١ + \sqrt{٣}$ ت (جـ) $ع_٣ = هـ^{٣ + \frac{\pi}{٦}ت}$ (د) $ع_٤ = -٢ت$

الحل

(أ) $ع_١ = ١ + ت$ ∴ س = ١ ، ص = ١

$ل = |ع_١| = \sqrt{(١)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٢}$

∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ $ع_١$ يقع فى الربع الأول

$\theta = ظا^{-١}(\frac{١}{١}) = \frac{\pi}{٤}$ ∴ $ع_١ = ل هـ^{\theta ت} = \sqrt{٢}\ هـ^{\frac{\pi}{٤}ت}$

(ب) $ع_٢ = -١ + \sqrt{٣}$ ت ∴ س = -١ ، ص = $\sqrt{٣}$

$ل = \sqrt{(-١)^٢ + (-\sqrt{٣})^٢} = ٢$

∵ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ $ع_٢$ يقع فى الربع الثانى

∴ $\theta = \pi + ظا^{-١}(-\sqrt{٣}) = \frac{٢}{٣}\pi$ ∴ $ع_٢ = ل هـ^{\theta ت} = ٢ هـ^{\frac{٢}{٣}\pi ت}$

(جـ) $ع_٣ = هـ^{٣ + \frac{\pi}{٦}ت} = هـ^٣ \times هـ^{\frac{\pi}{٦}ت}$ ويكون $ل = |ع_٣| = هـ^٣$ ، سعة $ع_٣ = \frac{\pi}{٦}$

(د) ∵ $ع_٤ = -٢ت$ ∴ س = ٠ ، ص = -٢ ∴ $ل = \sqrt{(٠)^٢ + (-٢)^٢} = \sqrt{٤} = ٢$

∵ س = ٠ ، ص = -٢ ∴ $ع_٤$ يقع على محور ص

∴ $\theta = \frac{-\pi}{٢}$ ∴ $ع_٤ = ٢ هـ^{\frac{-\pi}{٢}ت}$

حاول أن تحل

(٨) إذا كان $ع = \frac{\sqrt{٢}\ ت}{١ + ت}$ فاكتب العدد ع بالصورة الأسية.

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة الأسية.

إذا كان $ع_١ = ل_١ هـ^{\theta_١ ت}$ ، $ع_٢ = ل_٢ هـ^{\theta_٢ ت}$

فإن $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ هـ^{\theta_١ ت} \times هـ^{\theta_٢ ت} = ل_١ ل_٢ هـ^{(\theta_١ + \theta_٢)ت}$ ،

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} \times \frac{هـ^{\theta_١ ت}}{هـ^{\theta_٢ ت}} = \frac{ل_١}{ل_٢} هـ^{(\theta_١ - \theta_٢)ت}$

مثال

(٩) أوجد ناتج كل مما يأتى فى الصورة الأسية:

(أ) ٢(جتا ٢٥° + ت جا ٢٥°) × ٢(جا ١٥٨° - ت جا ١٥٨°) (ب) $(\frac{١ + ت}{١ - ت})^٧$

الحل

أ) تحويل $ع_٢$ إلى الصورة المثلثية القياسية كالآتى:

∵ (جا ١٥٨° - ت جا ١٥٨°) = جا (٩٠° + ٦٨°) - ت جتا (٩٠° + ٦٨°) = جتا ٦٨° + ت جا ٦٨°

∴ ٣ (جتا ٢٥° + ت جا ٢٥°) × ٢ (جتا ٦٨° + ت جا ٦٨°)

= ٦ (جتا (٢٥° + ٦٨°) + ت جا (٢٥° + ٦٨°))

= ٦ (جتا ٩٣° + ت جا ٩٣°) = ٦ $هـ^{١,٦٢ ت}$

ب) ∵ ١ + ت = $\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

١ - ت = $\sqrt{٢}$ (جتا (-٤٥°) + ت جا (-٤٥°))

∴ $\left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)$ = جتا (٤٥° + ٤٥°) + ت جا (٤٥° + ٤٥°)

= جتا ٩٠° + ت جا ٩٠° = جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$

∴ $\left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)^{٧}$ = (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)^{٧} = جتا $\frac{٧\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{٧\pi}{٢}$

= جتا $\left(\frac{-\pi}{٢}\right)$ + ت جا $\left(\frac{-\pi}{٢}\right)$ = $هـ^{\frac{-\pi}{٢} ت}$

لاحظ أن

$\frac{٩٣°}{١٨٠°} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}$

أى أن: $\theta^{ء} = \frac{٩٣°}{١٨٠°} \times \pi$

$\theta^{ء} \simeq ١,٦٢$

حاول أن تحل

٩) إذا كان $ع_١$ = ١ - $\sqrt{٣}$ ت ، $ع_٢$ = ١ + ت ، أوجد كلًّا مما يأتى فى الصورة المثلثية:

أ) $ع_١ ع_٢$ ب) $\frac{ع_٢}{ع_١}$ جـ) $(ع_٢)^{٦}$

مثال

١٠) عبر عن ع = $\sqrt{٢}$ $هـ^{\frac{٣\pi}{٤} ت}$ بالصورة الجبرية س + ص ت حيث س ، ص ∈ ح

الحل

∵ ع = $\sqrt{٢}$ $هـ^{\frac{٣\pi}{٤} ت}$ ∴ ل = |ع| = $\sqrt{٢}$ ، $\theta = \frac{٣\pi}{٤}$

∴ ع = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$)

= $\sqrt{٢}$ $\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} ت\right)$

= -١ + ت

لاحظ أن

جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ = جتا ١٣٥° = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

جا $\frac{٣\pi}{٤}$ = جا ١٣٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

حاول أن تحل

١٠) عبر عن ع = ٨ $هـ^{\frac{\pi}{٦} ت}$ بالصورة الجبرية س + ص ت حيث س ، ص ∈ ح

تمارين (٢ - ١)

اكمل ما يأتي

(١) العدد ع = ٣ - ٤ت يُمثَّل على شكل أرجاند بالنقطة ا حيث ا = (........ ، ....)

(٢) إذا كانت نقطة ا تمثل العدد ع على مستوى أرجاند، ب تمثل العدد $\overline{ع}$ على مستوى أرجاند، فإن ب صورة ا بالانعكاس فى ....

(٣) مقياس العدد المركب ع = -٥ ت يساوى ....

(٤) إذا كان ع = $\frac{٢ - ت}{٢ + ت}$ فإن |ع| = ...

(٥) إذا كانت θ هى السعة الأساسية للعدد المركب ع فإن سعة $\overline{ع}$ هى ....

(٦) إذا كان ع = $\frac{١}{ع}$ فإن |ع| = ...

(٧) الصورة الأسية للعدد -١ + ت هى ....

(٨) إذا كان ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت فإن السعة الأساسية العدد (١ + $\sqrt{٣}$ ت)^{٨} هى ....

(٩) الصورة المثلثية للعدد ع = -٢ - ٢$\sqrt{٣}$ ت هى ....

(١٠) إذا كانت سعة العدد المركب ع هى θ فإن سعة العدد المركب ٢ع هى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١١) إذا كان ع = $\sqrt{٢}$ (جا ٣٠° + ت جتا ٣٠°) فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى

أ) ٣٠° ب) ٦٠° جـ) ٩٠° د) ١٢٠°

(١٢) إذا كان ع = (١ + $\sqrt{٣}$ ت)^{ن} و كان |ع| = ٨ فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى

أ) $\frac{\pi}{٢}$ ب) $\frac{\pi}{٣}$ جـ) $\frac{\pi}{٦}$ د) π

(١٣) إذا كان $ع_١$ = $ل_١$ (جتا$\theta_١$ + ت جا$\theta_١$) ، $ع_٢$ = $ل_٢$ (جتا$\theta_٢$ + ت جا$\theta_٢$) وكان $\theta_١$ + $\theta_٢$ = π فإن $ع_١ ع_٢$ =

أ) $ل_١ ل_٢$ ب) -$ل_١ ل_٢$ جـ) $ل_١ ل_٢$ت د) -$ل_١ ل_٢$ ت

(١٤) سعة العدد المركب ع = -٣ تساوى

أ) صفر° ب) ٩٠° جـ) ١٨٠° د) ٢٧٠°

(١٥) إذا كان ع = -١ + $\sqrt{٣}$ ت فإن |$\overline{ع}$| =

أ) -١ - $\sqrt{٣}$ ت ب) $\sqrt{٢}$ جـ) ٢ د) -٢

(١٦) إذا كان $ع_١ = -١ - ت$ فإن الصورة الأسية للعدد ع هى

أ) $هـ^{\frac{٣\pi}{٤}ت}$ ب) $هـ^{\frac{٥\pi}{٤}ت}$ ج) $\sqrt{٢}\, هـ^{\frac{-٣\pi}{٤}ت}$ د) $\sqrt{٢}\, هـ^{٢٢٥ت}$

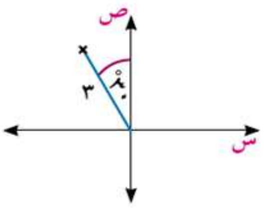
(١٧) إذا كان $ع_١ = ٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$ ، $ع_٢ = -٣ - ٣\sqrt{٣}$ فإن سعة العدد $ع_١ + ع_٢ =$

أ) $٦٠°$ ب) $٢٤٠°$ ج) $١٨٠°$ د) $٣٠٠°$

(١٨) إذا كان $س + ص\,ت = \frac{أ + ب\,ت}{أ - ب\,ت}$ فإن $س^٢ + ص^٢$

أ) $أ^٢ + ب^٢$ ب) $أ^٢ - ب^٢$ ج) $٢أ\,ب$ د) ١

(١٩) الشكل المقابل يمثل العدد المركب



أ) $٣(جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)$

ب) $٣(جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)$

ج) $٣(جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)$

د) $٣(جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)$

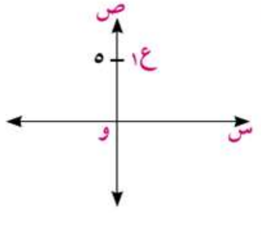
(٢٠) إذا كان ع عددًا مركبًا سعته الأساسية θ فإن سعة $\frac{١}{ع}$ هى ....

أ) θ ب) $-\theta$ ج) $\pi - \theta$ د) $-\pi + \theta$

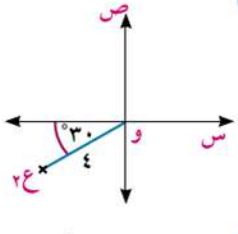
أجب عمَّا يأتى:

(٢١) اكتب كلًّا من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية:

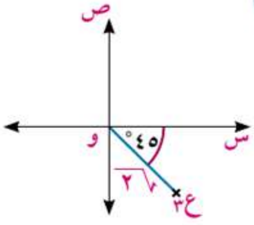
أ)



ب)



ج)



د) $ع_٤ = -\sqrt{٣} + ٤ت$ هـ) $ع_٥ = ٤ (جتا ٤٠° - ت جا ٤٠°)$

(٢٢) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) $ع_١ = -١ + ت$

ب) $ع_٢ = \frac{٤}{\sqrt{٣} - ت}$

ج) $ع_٣ = -٢(جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)$

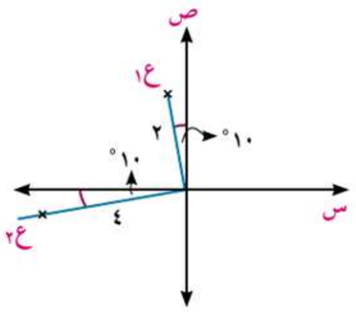
د) $ع_٤ = ١ + ت ظا ٢٠°$

(٢٣) إذا كان ع١ = جتا ١١٤° + ت جا ٦٦° ، ع٢ = جتا ٤٢° + ت جا ١٣٨°

ع٣ = جا ٢٤ + ت جا ١١٤، أوجد الصورة الجبرية للعدد: $\frac{ع١ع٢}{ع٣}$

(٢٤) إذا كان ع١ = ٢ (جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°) ، ع٢ = ٤ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)، أوجد على الصورة الأسية العدد:

ع١ع٢ ، $\frac{ع١}{ع٢}$



(٢٥) **فى الشكل المقابل** أوجد على الصورة الأسية العدد: $\frac{ع١}{ع٢}$

(٢٦) اكتب كلًّا من الأعداد الآتية بالصورة الجبرية:

أ) ع١ = هـ$^{\frac{\pi}{3}ت}$

ب) ع٢ = ٢ هـ$^{\frac{3\pi}{4}ت}$

ج) ٣ هـ$^{\frac{-\pi}{6}ت}$

(٢٧) إذا كان ع = ٢(جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$) أثبت أن $\frac{1}{ع}$ = $\frac{1}{2}$ هـ$^{\frac{5\pi}{3}ت}$

(٢٨) إذا كان ع = $\sqrt{3}$ + ت أوجد بالصورة الجبرية ع^{6}

(٢٩) إذا كان ع = $\frac{(أ + ب) + ت (أ - ب)}{(أ - ب) - ت (أ + ب)}$ فأوجدالعدد ع فى أبسط صورة ثم أوجد |ع| حيث أ ، ب ∈ ح

(٣٠) تفكير إبداعى: إذا كان ع١ = جتا ٧٥ + ت جا ٧٥ ، ع٢ = جتا ١٥ + ت جا ١٥، أوجد بالصورة المثلثية للعدد: ع١ + ع٢

(٣١) إذا كان سعة ع١ = $\frac{\pi}{3}$ ، و سعة ع٢ = $\frac{3\pi}{4}$ ، سعة ع٣ = $\frac{\pi}{6}$ أوجد:

أ) سعة (ع١^{3} ع٢^{2})   ب) سعة (٢ع١ . ع٢)   ج) سعة ($\frac{ع١ع٢}{ع٣}$)   د) سعة (ع٢^{6})

(٣٢) تفكير إبداعى: أثبت أن جتا θ = $\frac{1}{2}$ (هـ$^{\theta ت}$ + هـ$^{-\theta ت}$)،   جا θ = $\frac{-ت}{2}$ (هـ$^{\theta ت}$ - هـ$^{-\theta ت}$)

نظرية ديموافر

De Moivre's theorem

سوف تتعلم

- نظرية ديموافر لأس صحيح موجب.
- نظرية ديموافر لأس نسبي موجب.
- جذور العدد المركب.
- تمثيل جذور العدد المركب على شكل أرجاند.

مصطلحات أساسية

- نظرية ديموافر *demoivres thearem*
- جذر *root*

فكر و ناقش

أ) إذا كان ع عددًا مركبًا مقياسه ل، وسعته الأساسية θ فأوجد:

١) مقياس العدد $ع^٣$ **٢)** سعة العدد $ع^٣$

ب) إذا كان ع عددًا مركبًا، وكان السعة الأساسية للعدد $ع^٣$ هي θ فإن السعة الأساسية للعدد ع هي ....

تعلم

نظرية ديموافر بأس صحيح

إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا

فإن $(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)^{ن} = \text{جتا}\,ن\theta + \text{ت جا}\,ن\theta$

مثال

١) عبر عن جتا ٣θ بدلالة قوى جتا θ

الحل

$\because (\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)^٣ = \text{جتا}\,٣\theta + \text{ت جا}\,٣\theta$ **(١) نظرية ديموافر**

أيضًا $(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)^٣ = \text{جتا}^٣\theta + ٣ق_١ \text{جتا}^٢\theta\,(\text{ت جا}\,\theta)$

$+ ٣ق_٢ \text{جتا}\,\theta\,(\text{ت جا}\,\theta)^٢ + (\text{ت جا}\,\theta)^٣$ **(نظرية ذات الحدين)**

$= \text{جتا}^٣\theta + ٣\text{ت جتا}^٢\theta\,\text{جا}\,\theta - ٣\,\text{جتا}\,\theta\,\text{جا}^٢\theta - \text{ت جا}^٣\theta$ **(٢)**

من (١) ، (٢) بمساواة الجزء الحقيقي

$\because \text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta = ١ \quad \therefore \text{جا}^٢\theta = ١ - \text{جتا}^٢\theta$

$\therefore \text{جتا}\,٣\theta = \text{جتا}^٣\theta - ٣\,\text{جتا}\,\theta\,\text{جا}^٢\theta$

$= \text{جتا}^٣\theta - ٣\,\text{جتا}\,\theta\,(١ - \text{جتا}^٢\theta)$

$= \text{جتا}^٣\theta - ٣\,\text{جتا}\,\theta + ٣\,\text{جتا}^٣\theta$

$= ٤\,\text{جتا}^٣\theta - ٣\,\text{جتا}\,\theta$

حاول أن تحل

١) عبر عن جا ٣θ بدلالة قوى جا θ

نظرية ديموافر بأس نسبى موجب

نعلم أن جتاθ + ت جاθ = جتا (θ + ٢ر π) + ت جا (θ + ٢ر π)؛ حيث ر عدد صحيح.

فإذا كان ك عددًا موجبًا فإن (جتاθ + ت جاθ)$^{\frac{1}{ك}}$ = جتا$\frac{\theta + ٢ر\pi}{ك}$ + ت جا $\frac{\theta + ٢ر\pi}{ك}$

أي إن مقدار (جتاθ + ت جاθ)$^{\frac{1}{ك}}$ يأخذ قيمًا متعددة تبعًا لقيم ر، ويكون عدد هذه القيم المختلفة يساوى ك من القيم، التي نحصل عليها بوضع قيم ر= ... ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ .... التي تجعل السعة $\frac{\theta + ٢ر\pi}{ك}$ محصورة بين -π، π.

مثال

(٢) أوجد بالصورة المثلثية وبالصورة الأسية جذور المعادلةالآتية في ك ع^٤ = ٨(١- $\sqrt{٣}$ ت)
ثم اكتب مجموعة حل المعادلة.

الحل

∵ ع^٤ = ٨ - ٨ $\sqrt{٣}$ ت   ∴ س = ٨ ، ص = - ٨ $\sqrt{٣}$

ل = $\sqrt{(٨)^٢ + (-٨\sqrt{٣})^٢}$ = ١٦ ، ظاθ = $\frac{-٨\sqrt{٣}}{٨}$ = - $\sqrt{٣}$

∵ س > ٠ ، ص < ٠   ∴ع^٤ تقع فى الربع الرابع

θ=ظا$^{-١}$ (- $\sqrt{٣}$) = - $\frac{\pi}{٣}$

∴ ع^٤ =١٦ (جتا $\frac{-\pi}{٣}$) + ت جا ($\frac{-\pi}{٣}$))

∴ ع = ٢ (جتا$\frac{١}{٤}$ (- $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ π ر) + ت جا$\frac{١}{٤}$ (- $\frac{\pi}{٣}$ + ٢π ر))

عندما   ر = ٠   فإن   ع$_١$ = ٢ (جتا($\frac{-\pi}{١٢}$) + ت جا ($\frac{-\pi}{١٢}$)) = ٢ هـ$^{\frac{-\pi}{١٢}ت}$

عندما   ر = ١   فإن   ع$_٢$ = ٢ (جتا($\frac{٥\pi}{١٢}$) + ت جا ($\frac{٥\pi}{١٢}$)) = ٢ هـ$^{\frac{٥\pi}{١٢}ت}$

عندما   ر = -١   فإن   ع$_٣$ = ٢ (جتا($\frac{-٧\pi}{١٢}$) + ت جا ($\frac{-٧\pi}{١٢}$)) = ٢ هـ$^{\frac{-٧\pi}{١٢}ت}$

عندما   ر = ٢   فإن   ع$_٤$ = ٢ (جتا($\frac{١١\pi}{١٢}$) + ت جا ($\frac{١١\pi}{١٢}$)) = ٢ هـ$^{\frac{١١\pi}{١٢}ت}$

∴ مجموعة الحل= {٢هـ$^{\frac{-\pi}{١٢}ت}$ ، ٢ هـ$^{\frac{٥\pi}{١٢}ت}$ ، ٢هـ$^{\frac{-٧\pi}{١٢}ت}$ ، ٢ هـ$^{\frac{١١\pi}{١٢}ت}$}

حاول أن تحل

(٢) أوجد في ك مجموعة حل المعادلة ع^٤= ٢+ ٢ $\sqrt{٣}$ ت

مثال

(٣) أوجد جذور المعادلة ع^٣ = ١، ومَثِّل الجذور على مستوى أرجاند.

الحل

ع^٣ = ١

= جتا٠° + ت جا٠°

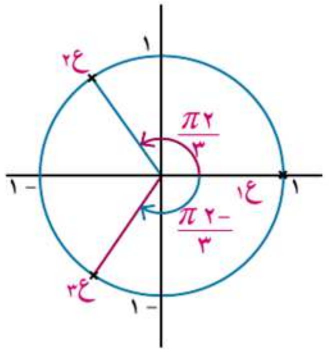
∴ع = (جتا٠° + ت جا٠°)$^{\frac{١}{٣}}$

$= \text{جتا } \frac{1}{3}(2ر\pi) + \text{ت جا } \frac{1}{3}(2ر\pi)$

عندما ر = ٠ فإن $ع_1$ = جتا ٠° + ت جا٠° = ١

عندما ر = ١ فإن $ع_2 = \text{جتا } \frac{2\pi}{3} + \text{ت جا } \frac{2\pi}{3}$

عندما ر = - ١ فإن $ع_3 = \text{جتا } \frac{-2\pi}{3} + \text{ت جا } \frac{-2\pi}{3}$



نلاحظ أن الجذور تقسم الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها الوحدة إلى ٣ أقواس متساوية، وقياس كل منها ١٢٠°(إحداثيات النقط تكون رؤوس مثلث متساوى الأضلاع).

حاول أن تحل

(٣) أوجد جذور المعادلة $ع^4$ = ١ ومثل الجذور على مستوى أرجاند.

الجذور النونية

المعادلة $س^ن = أ$ حيث أ عدد مركب يكون لها ن من الجذور على الصورة $س = أ^{\frac{1}{ن}}$.

يمكن حسابها بإيجاد الصورة المثلثية للعدد أ ثم تطبيق نظرية ديموافر، وتقع الجذور جميعًا في مستوى أرجاند على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها $|أ|^{\frac{1}{ن}}$. وتكون رؤوس مضلعًا منتظمًا، عدد أضلاعه ن.

مثال

(الجذور الخماسية للعدد - ٣٢)

(٤) مثل على شكل أرجاند الجذور الخماسية للعدد - ٣٢

الحل

الجذور الخماسية للعدد - ٣٢ هي حلول المعادلة $ع^5$ = - ٣٢

وبتحويل العدد - ٣٢ إلى الصورة المثلثية.

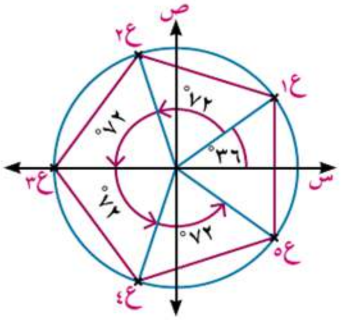
$\therefore ع^5 = 32(\text{جتا } \pi + \text{ت جا } \pi)$

$\therefore ع = 32^{\frac{1}{5}}(\text{جتا } \pi + \text{ت جا } \pi)^{\frac{1}{5}}$

$= 2\left(\text{جتا } \frac{1}{5}(\pi + 2ر\pi) + \text{ت جا } \frac{1}{5}(\pi + 2ر\pi)\right)$.

نوجد الجذر الأول وذلك بوضع ر = صفر

$\therefore ع = 2\left(\text{جتا } \frac{\pi}{5} + \text{ت جا } \frac{\pi}{5}\right) = 2(\text{جتا } 36° + \text{ت جا} 36°)$



وتكون قياس الزاوية بين كل جذر والذي يليه هي $\frac{360}{5} = 72°$

$ع_2 = 2(\text{ جتا } (36° + 72°) + \text{ت جا } (36° + 72°)) \quad = 2(\text{جتا } 108° + \text{ت جا } 108°)$

$ع_3 = 2(\text{جتا}(36° + 2 \times 72°) + \text{ت جا } (36° + 2 \times 72°)) \quad = 2(\text{جتا } 180° + \text{ت جا } 180°)$

$ع_4 = 2(\text{ جتا } (36° + 3 \times 72°) + \text{ت جا } (36° + 3 \times 72°)) \quad = 2(\text{جتا } 252° + \text{ت جا } 252°)$

$= 2(\text{جتا } (-108°) + \text{ت جا } (-108°))$

ع$_{٥}$ = ٢ (جتا (٣٦° + ٤ × ٧٢°) + ت جا (٣٦° + ٤×٧٢°)) = ٢ (جتا ٣٢٤° + ت جا ٣٢٤°)

= ٢ (جتا -٣٦° + ت جا -٣٦°)

حاول أن تحل

(٤) مثِّل على شكل أرجاند الجذور السداسية للعدد ١

مثال

(٥) أوجد الجذور التربيعية للعدد ٣+ ٤ ت

الحل

نفرض أن (٣+ ٤ت)$^{\frac{١}{٢}}$ = س + ص ت بتربيع الطرفين

∴ ٣+ ٤ت = س^{٢} - ص^{٢}+ ٢ س ص ت

بمساواة الجزء الحقيقي بالجزء الحقيقي والجزء التخيلي بالجزء التخيلي

∴ س^{٢} - ص^{٢}= ٣ ⟵ (١) ، ٢ س ص = ٤ ⟵ (٢) بتربيع (١) ، (٢) والجمع

∴ س^{٤} - ٢ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} + ٤س^{٢} ص^{٢} = ٩ + ١٦ ∴ س^{٤} + ٢س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} = ٢٥

∴ (س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = ٢٥ ∴ (س^{٢}+ ص^{٢})= ٥ ⟵ (٣)

بجمع (١)، (٣) ⟵ ٢ س^{٢} = ٨ ومنها س = ± ٢ عند س = ٢ بالتعويض في (٢) ⟵ ص = ١

عند س = -٢ بالتعويض في (٢) ⟵ ص = -١

∴ الجذر الأول = ٢ + ت ∴ الجذر الثاني = - ٢ - ت

حاول أن تحل

(٥) أوجد الجذرين التربيعين للعدد ٧ - ٢٤ت

مثال

(٦) أوجد في ك مجموعة حل المعادلة (١ - ت) س^{٢} - (٦ - ٤ت) س +٩ - ٧ ت = ٠

الحل

يمكن وضع المعادلة على الصورة:

س^{٢} - $\frac{٦ - ٤ت}{١ - ت}$ س + $\frac{٩ - ٧ت}{١ - ت}$ = ٠ س^{٢} - (٥ + ت) س + ٨ + ت = ٠

باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ = $\frac{(٥ + ت) \pm \sqrt{(٥ + ت)^{٢} - ٤ \times ١(٨ + ت)}}{٢}$

س = $\frac{(٥ + ت) \pm \sqrt{٢٤ + ١٠ت - ٣٢ - ٤ت}}{٢}$

س = $\frac{(٥ + ت) \pm \sqrt{-٨ + ٦ت}}{٢}$

نفرض أن أ + ب ت = $\sqrt{-٨ + ٦ت}$ بتربيع الطرفين

أ^{٢} - ب^{٢} + ٢أ ب ت = - ٨ + ٦ت

أ^{٢} - ب^{٢} = -٨ (١)   ٢أ ب = ٦ (٢)

أ^{٢} + ب^{٢} = ١٠ (٣)   من (١)، (٣) أ^{٢} = ١   ∴ أ = ±١   ∴ ب = ±٣

∴ أ + ب ت = ± (١ + ٣ ت)

∴ س = $\frac{\text{٥ + ت} \pm (\text{١ + ٣ت})}{\text{٢}}$ س = ٣ + ٢ ت   أو   س = ٢ - ت

حاول أن تحل

٦) أوجد في ك مجموعة حل المعادلة س^{٢} + (١ + ت) س - ٦ + ٣ت = ٠

تمارين (٢ - ٢)

١) باستخدام نظرية ديموافر أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ) جتا ٤θ = ٨ جتا^{٤} θ - ٨جتا^{٢}θ + ١   ب) جا ٥θ = ١٦ جا^{٥}θ - ٢٠جا^{٣}θ + ٥ جاθ

٢) أوجد فى ك مجموعة حل كل من المعادلات الآتية؛ اكتب الجذور على صورة س + ص ت:

أ) ع^{٤} = ١٦   ب) ع^{٣} + ٨ = ٠   ج) ع^{٣} + ٨ت = ٠

٣) أوجد مجموعة حل المعادلة ع^{٥} + ٢٤٣ = ٠ حيث ع ∈ ك

٤) أوجد مجموعة حل المعادلة ع^{٤} = ٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ت . اكتب الحل على الصورة الأسية.

٥) أوجد الجذور التربيعية لكل من:

أ) ٢ - ٢$\sqrt{٣}$ ت   ب) ١ - ت   ج) ٨ ت

د) ٣ + ٤ ت   هـ) ٥ - ١٢ ت

٦) أوجد الجذور التكعيبية للعدد ٨ ومثل هذه الجذور على شكل أرجاند.

٧) أوجد الجذور الرابعة للعدد - ١ ومثل هذه الجذور على شكل أرجاند.

٨) إذا كان $\frac{\text{٧ - ١١ ت}}{\text{٤ + ت}}$ = أ + ب ت، أوجد قيم المقدار ($\sqrt{\text{-ب}}$ + أ ت)$^{\frac{٢}{٣}}$

٩) ضع العدد ٢$\sqrt{٢}$ (١ + ت) على الصورة المثلثية، ثم أوجد جذوره التربيعية على الصورة الأسية.

١٠) إذا كان ع = ٨ - ٦ ت أوجد ع$^{\frac{٣}{٢}}$ على الصورة الجبرية.

١١) تفكير إبداعي: أثبت أن جتا^{٤} θ = $\frac{١}{٨}$ (جتا ٤θ + ٤ جتا (٢ θ + ٣))

الوحدة الثانية

٢ - ٣

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

Cubic roots of unity

سوف تتعلم

- الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- تمثيل الجذور التكعيبية للواحد هندسيًّا
- مرافق الأعداد أ + ω، أ ت + ω

مصطلحات أساسية

جذر	Root
جذر تربيعي	Square root
جذر تكعيبي	Cubic root
دائرة الوحدة	Unit circle
مرافق	Conjugate

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator
- برامج رسومية Graphical programs

عمل تعاوني :

باستخدام نظرية ديمواڤر أوجد مجموعة حل المعادلة ع^{٣} = ١

أوجد الجذور السابقة بالصورة الجبرية.

أوجد مجموع الجذور الثلاثة . ماذا تلاحظ؟

تعلم

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح — Cubic roots of unity

باستخدام نظرية ديمواڤر نجد أن: مجموعة حل المعادلة ع^{٣} = ١ هي:

١ ، $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت.

ونلاحظ أن مربع أحد الجذرين المركبين يساوى الجذر الآخر؛

ولذلك يمكن أن نفرض الجذور التكعيبية على الصورة ١ ، ω، $\omega^{٢}$

حيث $\omega = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\omega^{٢} = -\frac{١}{٢} \mp \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

تفكير ناقد:

هل يمكنك إيجاد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح باستخدام الصورة الجبرية للعدد المركب؟

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:

إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن

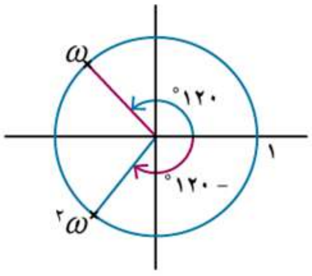
١- $١ + \omega + \omega^{٢}$ = صفر (مجموع الجذور = صفر)

($١ + \omega = -\omega^{٢}$ ، $١ + \omega^{٢} = -\omega$ ، $\omega + \omega^{٢} = -١$)

٢- $\omega^{٣} = ١$

($\frac{١}{\omega} = \omega^{٢}$ ، $\frac{١}{\omega^{٢}} = \omega$)

٣- الجذور التكعيبية للواحد الصحيح تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ١ وتكوّن رؤوس مثلث متساوى الأضلاع.



٤- $(\omega - \omega^{٢}) = \pm\sqrt{٣}$ ت ، $(\omega^{٢} - \omega) = \pm\sqrt{٣}$ ت

مثال

(١) إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^٢$ ، هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح . أوجد قيمة كل من:

(أ) $٥ + ٥\omega + ٥\omega^٢$ (ب) $(١ - \frac{٢}{\omega} - \frac{٢}{\omega^٢})(٣ + ٥\omega + ٥\omega^٢)$

الحل

(أ) المقدار = ٥ ($١ + \omega + \omega^٢$) بأخذ العدد ٥ عامل مشترك

= ٥ × صفر = صفر

(ب) المقدار = $(١ - \frac{٢}{\omega} - \frac{٢}{\omega^٢})(٣ + ٥\omega + ٥\omega^٢)$ بالتعويض عن $\frac{١}{\omega} = \omega^٢$ ، $\frac{١}{\omega^٢} = \omega$

$= (١ - ٢\omega^٢ - ٢\omega)(٣ + ٥\omega + ٥\omega^٢) = (١ - ٢(\omega^٢ + \omega))(٣ + ٥(\omega + \omega^٢))$

$= (١ - ٢(-١))(٣ + ٥(-١)) = (١ + ٢)(٣ - ٥) = -٦$

حاول أن تحل

(١) إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^٢$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح . أوجد قيمة:

(أ) $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^٢)^٥$ (ب) $(\omega + \frac{١}{\omega})^٢(\omega^٢ + \frac{١}{\omega^٢})^٣$

مثال

(٢) أثبت أن $[\frac{٥ - ٣\omega^٢}{٥\omega - ٣} - \frac{٢ - ٧\omega}{٢\omega^٢ - ٧}]^٤ = ٩$

الحل

المقدار $= [\frac{٥ - ٣\omega^٢}{٥\omega - ٣} - \frac{٢ - ٧\omega}{٢\omega^٢ - ٧}]^٤ = [\frac{٥\omega^٣ - ٣\omega^٢}{٥\omega - ٣} - \frac{٢\omega^٣ - ٧\omega}{٢\omega^٢ - ٧}]^٤$

$= [\frac{\omega^٢(٥\omega - ٣)}{٥\omega - ٣} - \frac{\omega(٢\omega^٢ - ٧)}{٢\omega^٢ - ٧}]^٤ = [\omega^٢ - \omega]^٤ = [\pm\sqrt{٣}\,ت]^٤ = ٩$

حاول أن تحل

(٢) أثبت أن $= [\frac{أ + ب\omega + جـ\omega^٢}{\omega^٢ أ + ب + جـ\omega} - \frac{جـ + أ\omega^٢ + ب\omega}{\omega جـ + ب\omega^٢ + أ}]^٨ = ٨١$

مثال

(٣) أثبت أن س = $\frac{-١ + \sqrt{-٣}}{٢}$ هو أحد حلول المعادلة $س^{١٠} + س^٥ + ١ = $ صفر

الحل

∵ س $= \frac{-١ + \sqrt{-٣}}{٢} = \frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢} = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

أى إن س تمثل أحد الجذور المركبة للواحد الصحيح

عندما س = ω فإن $\omega^{١٠} + \omega^٥ + ١ = \omega^١ + \omega^٢ + ١ =$ صفر

عندما س = $س^٢$ فإن $\omega^{٢٠} + \omega^{١٠} + ١ = \omega^٢ + \omega + ١ = ٠$

حاول أن تحل

(٣) كون المعادلة التربيعية التى جذراها $(١ + \omega - \omega^{٢})^{٣}$ ، $(١ - \omega + \omega^{٢})^{٣}$

تمارين (٢ - ٣)

إذا كان ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

أكمل ما يأتى:

(١) $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^{٢})^{٢} =$ ......

(٢) $(\omega - \omega^{٢})^{٤} =$ ......

(٣) $(\omega + \frac{١}{\omega})^{٢} (\omega^{٢} + \frac{١}{\omega^{٢}})^{٢} =$ ......

(٤) إذا كان $س = \frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ فإن $س^{٨} + س^{٤} =$ ......

(٥) $(\frac{١}{\omega + ٢})(١ + \omega - \frac{٣}{\omega}) =$ ......

(٦) $١ + ٣\omega + ٣\omega^{٢} =$ ......

(٧) إذا كان $أ = ٢\omega - ٣\omega^{٢}$ ، $ب = ٣ + ٥\omega^{٢}$ فإن $أ^{٢} + ب^{٢} =$ ......

(٨) $\sum_{ر=١}^{٥} \omega^{ر} =$ ......

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٩) مرافق العدد ω يساوى

أ ω ب $\omega^{٢}$ ج ١ د $-\omega$

(١٠) $(\omega^{٢} + \frac{١}{\omega})(١ + \frac{١}{\omega^{٢}})^{٢} =$

أ ٢ ب صفر ج -٣ د -٥

(١١) $(أ + ب\omega + أ\omega^{٢})(أ + ب\omega^{٢} + أ\omega^{٤}) =$

أ ١ ب أ - ب ج $(أ - ب)^{٢}$ د $ب^{٢} - أ^{٢}$

(١٢) $(١ + ٢\omega^{٥} + \frac{١}{\omega^{٢}})(١ + ٢\omega + \frac{١}{\omega^{٤}}) =$

أ صفر ب ١ ج -١ د ٢

(١٣) $\frac{أ - ء\omega}{أ\omega^{٢} - ء} - \omega^{٢} =$

أ ٣ت ب $\pm\sqrt{٣}$ ت ج -٣ د ٣

(١٤) إذا كان $(١ + \omega)^{٧} = أ + ب\,\omega$ حيث أ ، ب عددان حقيقيان فإن (أ ، ب) =

أ (٠ ، -١) ب (١ ، ١) ج (٠ ، ١) د (١ ، -١)

(١٥) إذا كان $(١ + \omega)^{ن} = (١ + \omega^{٢})^{ن}$ فإن أقل قيمة لـ ن الصحيحة الموجبة هى

أ ٢ ب ٣ ج ٥ د ٦

(١٦) $١ + \omega + \omega^{٢} + \omega^{٣} + ... + \omega^{١٠٠} =$

أ صفر ب ١ ج ω د $-\omega^{٢}$

(١٧) إذا كان ع = $\omega^{س}$ فإن | ع | = ... حيث س عدد صحيح موجب

(أ) ١ (ب) ω (ج) س (د) $\omega^{٢}$

(١٨) $\sum_{ر=١}^{٦} (١ + \omega^{ر}) =$

(أ) صفر (ب) ٦ (ج) ١ (د) $١ + \omega$

(١٩) أثبت صحة المتطابقات الآتية:

(أ) $(١ - \omega + \omega^{٢})(١ - \omega^{٢} + \omega^{٤})(١ - \omega^{٤} + \omega^{٨})(١ - \omega^{٨} + \omega^{١٦}) = ٢^{٤}$

(ب) $\left(\frac{\omega}{١ + ٢\omega}\right)^{٢} + \left(\frac{١ + ٢\omega^{٢}}{\omega^{٢}}\right)^{٢} = \frac{-١٠}{٣}\,\omega^{٢}$

(ج) $\left[\frac{١}{١ + \omega ت} - \frac{\omega + ت}{١ + \omega^{٢} ت}\right]^{٨} = ١٦$

(د) $\left[\frac{٥ - ٣\omega^{٢}}{٥\omega - ٣} - \frac{٢ - ٧\omega}{٣\omega^{٢} - ٧}\right]^{٢} = -٣$

(هـ) $(١ + \omega^{٢})^{٨} = \omega^{٢}$

(و) $(١ - \omega^{٢} + \omega^{٤})^{٢} + (١ + \omega^{٢} + \omega^{٤})^{٢} = ٤\omega$

(٢٠) أوجد قيمة كل مما يأتى:

(أ) $٥ + ٣\omega + ٣\omega^{٢}$

(ب) $(١ + \omega + ٢\omega^{٢})^{٢} + (١ + ٢\omega + \omega^{٢})^{٢}$

(ج) $\frac{\omega^{٢}(\omega - ١)(\omega^{٢} - ١)}{(٢\omega + ١)(\omega^{٢} + ٢)}$

(د) $\left[\frac{١}{١ + ٣\omega^{٢}} - \frac{١}{١ + ٣\omega}\right]^{٢}$

(هـ) $(١ + \frac{١}{\omega} + ت)(١ + \frac{١}{\omega^{٢}} + ت)$

(٢١) إذا كان س = $\frac{-١ + \sqrt{٣}\, ت}{٢}$ أثبت أن $س^{٦} + ٦س^{٥} + ١٥س^{٤} + ٢٠س^{٣} + ١٥س^{٢} + ٦س = ٠$.

(٢٢) إذا كان $\frac{١}{١ + \omega}$ ، $\frac{١}{١ + \omega^{٢}}$ هما جذرا معادلة تربيعية، فأوجد المعادلة.

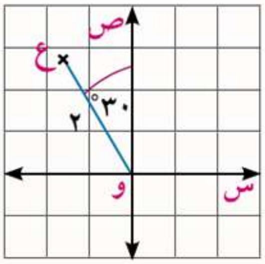
(٢٣) إذا كان ع = $٢(\omega + ت)(\omega^{٢} + ت)$ أوجد الصور المختلفة للعدد ع، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة المثلثية.

(٢٤) تفكير إبداعى: أوجد قيم ن التى تجعل $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^{٢})^{ن} = (٢ + ٢\omega + ٥\omega^{٢})^{ن}$

(٢٥) أوجد: (أ) $\sum_{ر=صفر}^{١٠} \omega^{ر}$ (ب) $\sum_{ر=صفر}^{١٠} (١ + \omega^{ر} + \omega^{٢ر})$

تمارين عامة

أكمل ما يأتى :



(١) إذا كان ع = $\frac{٢ + ت}{٢ - ت}$ فإن |ع| = ...

(٢) الصورة المثلثية للعدد ع الممثل على شكل أرجاند المقابل هى ....

(٣) إذا كانت ع = جاθ - ت جتاθ فإن سعة ع تساوى ....

(٤) مرافق العدد ت + $\omega^{٢}$ هو ....

(٥) ١ + ٢ω + ٢$\omega^{٢}$ = ...

(٦) إذا كانت $ع_{٠}$، $ع_{١}$ ، ... $ع_{٥}$ تمثل الجذور السداسية للواحد الصحيح على مستوى أرجاند فإن ق ($\angle$ $ع_{ر}$ و $ع_{ر+١}$) = ... حيث ٠ ≤ ر ≤ ٥

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٧) إذا كانت السعة الأساسية للعدد $ع_{١}$ هى $\theta_{١}$، والسعة الأساسية للعدد $ع_{٢}$ هى $\theta_{٢}$ فإن السعة الأساسية للعدد $ع_{١}ع_{٢}$ هى:
أ) $\theta_{١} + \theta_{٢}$　ب) $\theta_{١} \times \theta_{٢}$　ج) $\theta_{١} - \theta_{٢}$　د) $\theta_{١} \div \theta_{٢}$

(٨) أى مما يأتى يمثل الصورة الجبرية للعدد ٢ (جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٣}$):
أ) $-\sqrt{٣}$ + ت　ب) -١ + $\sqrt{٣}$ ت　ج) $-\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٢}$ ت　د) $-\sqrt{٣}$ - $\sqrt{٣}$ ت

(٩) إذا كانت النقطة أ ($\sqrt{٣}$ ، -١) تمثل العدد المركب ع على مستوى أرجاند فإن مقياس وسعة العدد ع هى
أ) (٢، $\frac{\pi}{٦}$)　ب) (٢، $\frac{٥\pi}{٦}$)　ج) (٢، -$\frac{٥\pi}{٦}$)　د) (٢، $\frac{-\pi}{٦}$)

(١٠) الجزء الحقيقى للعدد المركب الذى مقياسه $\sqrt{٢}$ وسعته $\frac{٧\pi}{٦}$ هو
أ) $-\sqrt{٣}$　ب) $-\frac{\sqrt{٦}}{٢}$　ج) $-\frac{\sqrt{٢}}{٦}$　د) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$

(١١) مرافق العدد ١+ω هو
أ) ١ - ω　ب) - $\omega^{٢}$　ج) ١ + $\omega^{٢}$　د) ١ - $\omega^{٢}$

(١٢) الجذور الخماسية للواحد الصحيح تمثل على مستوى أرجاند رؤوس
أ) مثلث متساوى الأضلاع　ب) مربع　ج) خماسى منتظم　د) سداسى منتظم

(١٣) إذا كان أ عددًا حقيقيًا فإن مرافق العدد $\frac{أ^٣ + ت}{أ^٢ + أت - ١}$ هو ....

(أ) أ - ت (ب) أ + ت (ج) $\frac{أ^٣ - ت}{أ^٢ - أت - ١}$ (د) $\frac{أ^٣ + ت}{أ^٢ - أت - ١}$

(١٤) إذا كان ع = $(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت)^ن$ حيث ن عدد صحيح موجب وكان ع = ١ فإن أصغر قيم ن = ...

(أ) ٩ (ب) ٦ (ج) ٣ (د) ١

(١٥) إذا كان |ع| = |ع - ٢| فإن الجزء الحقيقى للعدد ع يساوى = ...

(أ) ١ (ب) -١ (ج) -٢ (د) ٢

(١٦) $هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت}$ = ...

(أ) $هـ^{٢\theta ت}$ (ب) ٢ جتاθ (ج) ٢ جاθ (د) $هـ^{-٢\theta ت}$

(١٧) إذا كان |ع| = ١٠ فإن ع $\bar{ع}$ يساوى = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٠٠ (ج) ١ (د) -١٠٠

(١٨) عبر عن كل مما يأتى بالصورة س + ص ت:

(أ) $(جتا \frac{٣\pi}{١١} + ت جا \frac{٣\pi}{١١})(جتا \frac{٨\pi}{١١} + ت جا \frac{٨\pi}{١١})$

(ب) $٣(جتا \frac{\pi}{١٢} + ت جا \frac{\pi}{١٢}) \times \sqrt{٢} (جتا \frac{\pi}{٣} - ت جا \frac{\pi}{٣})$

(ج) $\frac{\sqrt{٢} (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})}{\frac{١}{٢} (جتا \frac{\pi}{٤} + ت جا \frac{\pi}{٤})}$

(١٩) إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين حيث $ع_١ = -٩ + ٣\sqrt{٣}$ ت ، $|ع_٢| = \sqrt{٣}$ ، سعة $ع_٢ = \frac{٧\pi}{١٢}$ ، أوجد كُلًّا من الأعداد المركبة الآتية على الصورة ل (جتاθ + ت جاθ) حيث $-\pi < \theta \leqslant \pi$

(أ) $ع_١$ (ب) $ع_٢$ (ج) $ع_١ ع_٢$ (د) $\frac{ع_١}{ع_٢}$

(٢٠) عبر عن كل من الأعداد الآتية بالصورة الأسية:

(أ) $ع_١ = ٧$ (ب) $ع_٢ = -٥$ ت (ج) $ع_٣ = \frac{١}{٢}$ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

(د) $ع_٤ = \frac{٤}{١ + \sqrt{٣} ت}$ (هـ) $ع_٥ = -٤ (جتا \frac{٧\pi}{٦} + ت جا \frac{٧\pi}{٦})$

(٢١) إذا كانت $\theta \in]-\pi ، \pi[$ أوجد مقياس وسعة العدد ع = ١ + جتاθ + ت جاθ

(٢٢) إذا كان ع = $\frac{(١ + ت)(٢ - ت)}{(١ - ت)(٣ + ت)}$ أوجد |ع|

(٢٣) تفكير إبداعى: استخدم الأعداد المركبة فى إثبات صحة العلاقة الآتية :

$ظا^{-١} (\sqrt{٣}) + ظا^{-١} (\frac{١}{\sqrt{٣}}) = \frac{\pi}{٢}$

ملخص الوحدة

- **العدد المركب:** لكل س ، ص ∈ ح فإن العدد ع = س + ص ت يسمى عددًا مركبًا الجزء الحقيقى له هو س والجزء التخيلى له هو ص حيث $ت^2 = -1$

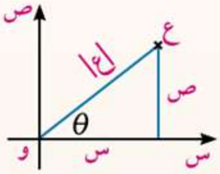
- **مرافق العدد المركب:** إذا كان ع = س + ص ت عددًا مركبًا فإن مرافقة هو $\overline{ع}$ = س - ص ت ويكون $ع + \overline{ع}$ = عددًا حقيقيًّا، $ع\,\overline{ع}$ = عددًا حقيقيًّا

- **خواص المرافق:**

١) $\overline{(ع_1 + ع_2)} = \overline{ع_1} + \overline{ع_2}$ **٢)** $\overline{(ع_1 ع_2)} = (\overline{ع_1})(\overline{ع_2})$ **٣)** $\overline{\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right)} = \left(\frac{\overline{ع_1}}{\overline{ع_2}}\right)$

- **التمثيل الهندسى للعدد المركب:** العدد المركب ع = س + ص ت تمثله النقطة (س ، ص) فى المستوى الإحداثى لأرجاند.

- **المقياس والسعة للعدد المركب:** إذا كانت النقطة (س ، ص) تمثل العدد المركب ع على مستوى أرجاند، فإن $|ع| = \sqrt{س^2 + ص^2}$ سعة ع تتعين من العلاقتين $جتا\theta = \frac{س}{ل}$ ، $جا\theta = \frac{ص}{ل}$



- **خواص المقياس والسعة للعدد المركب**

١) $|ع| = |\overline{ع}|$ **٢)** $ع\,\overline{ع} = |ع|^2 = |\overline{ع}|^2$

٣) $|ع_1 ع_2| = |ع_1||ع_2|$ **٤)** $\left|\frac{ع_1}{ع_2}\right| = \frac{|ع_1|}{|ع_2|}$

٥) $|ع_1 + ع_2| \leqslant |ع_1| + |ع_2|$

٦) سعة العدد المركب يمكن أن تأخذ عددًا غير منتهٍ من القيم التى تختلف كل منها عن الأخرى بعدد صحيح من مضاعفات ٢ π.

٧) السعة التى تنتمى للفترة] - π ، π] تسمى السعة الأساسية للعدد المركب.

٨) سعة $\overline{ع}$ = - سعة ع **٩)** سعة (- ع) = $-\pi$ + سعة ع **١٠)** سعة $\frac{1}{ع}$ = - سعة ع

- **الصورة المثلثية للعدد المركب:** ع = ل (جتا θ + ت جاθ) حيث ع = |ل| ، θ السعة الأساسية

- **ضرب وقسمة الأعداد المركبة بالصورة المثلثية:**

إذا كان $ع_1 = ل_1$ (جتا θ_1 + ت جا θ_1) ، $ع_2 = ل_2$ (جتا θ_2 + ت جا θ_2) فإن:

$ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2$ [جتا ($\theta_1 + \theta_2$) + ت جا ($\theta_1 + \theta_2$)]

$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2}$ [جتا ($\theta_1 - \theta_2$) + ت جا ($\theta_1 - \theta_2$)]

- **الصورة الأسية للعدد المركب** (صورة أويلر) إذا كان ع عددًا مركبًا مقياسه ل وسعته الأساسية θ فإن:

ع = ل هـ $^{\theta ت}$ حيث θ بالتقدير الدائرى.

هـ $^{\theta ت}$ = جتا θ + ت جا θ ، هـ $^{-\theta ت}$ = جتا θ - ت جا θ = جتا $(-\theta)$ + ت جا $(-\theta)$

مفكوك أويلر للدوال جا س ، جتا س ، هـ^{س}

$$جا س = \frac{س}{\lfloor 1} - \frac{س^3}{\lfloor 3} + \frac{س^5}{\lfloor 5} - ...... + (-1)^{ن-1} \times \frac{س^{2ن+1}}{\lfloor 2ن+1} + ...$$

$$جتا س = 1 - \frac{س^2}{\lfloor 2} + \frac{س^4}{\lfloor 4} - \frac{س^6}{\lfloor 6} ...... + (-1)^{ن-1} \times \frac{س^{2ن-2}}{\lfloor 2ن-2}$$

$$هـ^{س} = 1 + \frac{س}{\lfloor 1} + \frac{س^2}{\lfloor 2} + \frac{س^3}{\lfloor 3} + ... + \frac{س^{ن-1}}{\lfloor ن-1} + ...$$

- **نظرية ديموافر:** إذا كان ن عددًا صحيحًا فإن:

١) $($جتا θ + ت جا $\theta)^{ن}$ = جتا نθ + ت جا ن θ

٢) إذا كان ك عددًا موجبًا فإن $($جتاθ + ت جا $\theta)^{\frac{1}{ك}}$ = جتا$\frac{\theta + 2ر\pi}{ك}$ + ت جا $\frac{\theta + 2ر\pi}{ك}$

أي إن مقدار $($جتاθ + ت جا $\theta)^{\frac{1}{ك}}$ يأخذ قيمًا متعددة تبعًا لقيم ر، ويكون عدد هذه القيم المختلفة يساوى ك من القيم، التي نحصل عليها بوضع قيم ر= ... ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ .... التي تجعل السعة $\frac{\theta + 2ر\pi}{ك}$ محصورة بين $-\pi$، π.

- **الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:** إذا كان ع^3 = ١ فإن ع = ١ ، $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت ، $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

ويرمز لهذه الجذور بالرموز ١ ،ω ، ω^2

حيث $\omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت ، $\omega^2 = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

- **خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:**

(١) $\omega^3 = 1$ (٢) $1 + \omega + \omega^2$ = صفر (٣) $\omega^2 - \omega = \pm\sqrt{3}$ ت

- **الجذور النونية للواحد الصحيح:** إذا كان ع^{ن} = ١

فإن ع = (جتا٠° + ت جا ٠°)$^{\frac{1}{ن}}$ = جتا $\frac{2\pi ك}{ن}$ + ت جا $\frac{2\pi ك}{ن}$ حيث ك$\in$ ص ، $\frac{2\pi ك}{ن} \in [-\pi ، \pi]$

وتمثل الجذور النونية للواحد الصحيح على مستوى أرجاند برؤوس مضلع منتظم عدد رؤوسه ن، وتقع على دائرة مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها ١.

لمزيد من الأنشطه والتدريبات زيارة الموقع الالكترونى www.sec3mathematics.com.eg

اختبار تراكمى

(١) حدد الربع الذى تقع فيه الزاوية θ فى كل مما يأتى :

أ) جتا θ > صفر ، جا θ < صفر
ب) جتا θ < صفر ، جا θ < صفر
جـ) جتا θ < صفر ، جا θ > صفر

(٢) أوجد مجموع وحاصل ضرب الجذرين للمعادلة $\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ١ = $ صفر

(٣) أوجد مقياس وسعة كل من الأعداد المركبة الآتية :

أ) $\text{ع}_{١} = \sqrt{٣} + \text{ت}$
ب) $\text{ع}_{٢} = -١ + \text{ت}$
جـ) $\text{ع}_{٣} = ٤\text{ت}$
د) $\text{ع}_{٤} = -٥$
هـ) $\text{ع}_{٥} = ٣ - ٤\text{ت}$

(٤) أوجد فى أبسط صورة $\text{ع} = \dfrac{١ + ٤\text{ت} + \text{ت}^{٢}}{٢ - \text{ت} - ٢\text{ت}^{٢} - \text{ت}^{٣}}$ ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة المثلثية.

(٥) إذا كان ع عددًا مركبًا . أوجد مجموعة حل المعادلة $٢\text{ع} - ٣\,\overline{\text{ع}} = ٥ + ١٠\text{ت}$

(٦) إذا كان $\text{ع} = ٤ + ٤\sqrt{٣}\,\text{ت}$ أوجد الصورة الأسية للعدد ع، ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع، ومَثِّلها على شكل أرجاند .

(٧) أوجد الصور المختلفة للعدد $\text{ع} = \dfrac{-\sqrt{٣} - \text{ت}}{\sqrt{٣} - \text{ت}}$، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع، ومَثِّل الجذرين على شكل أرجاند .

(٨) إذا كان $\text{ع}_{١} = \sqrt{٣}\left(\text{جتا}\dfrac{\pi}{٣} - \text{ت جا}\dfrac{\pi}{٣}\right)$ ، $\text{ع}_{٢} = ٢(\text{جا}٣٠^{\circ} + \text{ت جا}٣٠^{\circ})$

أوجد $\text{ع}_{١}$، $\text{ع}_{٢}$ فى الصورة الأسية، ثم أوجد الصورة المثلثية للعدد ع حيث $\text{ع} = (\text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢})^{\frac{١}{٤}}$

(٩) ضع العدد المركب $\text{ع} = \dfrac{-٤}{١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}}$ فى الصورة المثلثية والأسية ثم :

١) أثبت أن $\text{ع}^{٦}$ عدد حقيقى.
١) أثبت أن $\dfrac{١}{\text{ع}} = \dfrac{١}{٢}\text{هـ}^{\frac{٢\pi}{٣}\text{ت}}$

(١٠) إذا كان $\text{ع} = \text{هـ}^{\theta\text{ت}}$ أوجد المقياس والسعة الأساسية للعدد $\dfrac{١ + \text{ع}}{١ - \text{ع}}$

(١١) إذا كان $\text{ع} = \dfrac{-١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$ وكان $\text{ع}_{١} = \dfrac{١ + \text{ع}}{١ - \text{ع}}$ أوجد العدد $\text{ع}_{١}$ وجذريه التربيعيين فى الصورة المثلثية.

(١٢) أثبت أن :

أ) $\left(١ - \dfrac{٢}{\omega^{٢}} + \omega^{٢}\right)\left(١ + \omega - \dfrac{٥}{\omega}\right) = ١٨$

ب) $\dfrac{٣ + ٥\omega + ٣\omega^{٢}}{١ - ٢\omega - ٤\omega^{٢}} + \dfrac{٣ + ٥\omega^{٢} + ٣\omega}{١ - ٢\omega^{٢} - ٤\omega} = \dfrac{-٢}{١٩}$

الوحدة الثالثة

المحددات والمصفوفات
Determinants and Matrices

مقدمة الوحدة

تعد المصفوفات أحد أهم الأدوات المستخدمة فى كافة فروع الرياضيات، وتعتبر من أهم مفاتيح الجبر الخطى. فالمصفوفات (Matrices) هى مفهوم رياضى يؤدى دورًا مهمًّا فى معظم فروع المعرفة، وكان أول من اكتشف المصفوفات الصينيون القدماء وقد استخدمها العالم كيلى (١٨٩٥ - ١٨٢١) بعد ذلك بشكل منظم، ووضع لها نظمًا على صورة أعمدة وصفوف، وتستعمل المصفوفات فى الوقت الحاضر من قبل المختصين فى علم الاقتصاد وعلم الاجتماع وعلم النفس، هذا فضلًا عن الدور الكبير الذى تلعبه فى الرياضيات وتطبيقاتها الأخرى فى الفيزياء والكيمياء وسائر العلوم التطبيقية. أما المحددات وهى تمثل القيم الحسابية للمصفوفات المربعة فأول من استخدمها فى حل المعادلات الخطية هو العالم اليابانى سيكى كيوى (Sekikowa) سنة ١٦٨٣م، وتم تطوير هذا العلم على يد العلماء فى حل المعادلات الخطية وفى بعض التطبيقات الأخرى فى علوم مختلفة.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة، وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يستنتج خواص المحددات.
- يحل مسائل متنوعة مستخدمًا خواص المحددات.
- يعين معكوس مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة.
- يحل معادلات خطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة.
- يتعرف المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة.
- يعين مرتبة مصفوفة المعاملات ورتبة مصفوفة المعاملات الموسعة.
- يستنتج العلاقة بين مرتبة مصفوفة المعاملات ورتبة مصفوفة المعاملات الموسعة وإمكانية الحل.

مصطلحات أساسية

- محدد — Determinants
- محدد الرتبة الثانية — Second – order determinant
- محدد الرتبة الثالثة — Third – order determinant
- صف — Row
- محدد — Column
- المصفوفة — Matrix
- العنصر — Element
- مرتبة — Rank
- مصفوفة صف — Row matrix
- مصفوفة عمود — Column natrix
- مصفوفة مربعة — Square matrix
- مصفوفة صفرية — Zero matrices
- مصفوفات متساوية — Equal matrices
- مصفوفة موسعة — Augmented Matrix
- معادلة متجانسة — Homogenuous equation
- معادلة الغير متجانسة — Non Homgenuous equation
- المصفوفة الملحقة — Adjoint matrix
- مصفوفة العوامل — Cofactor matrix
- معادلة خطية — Linear Equation

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية — Scientific calculator

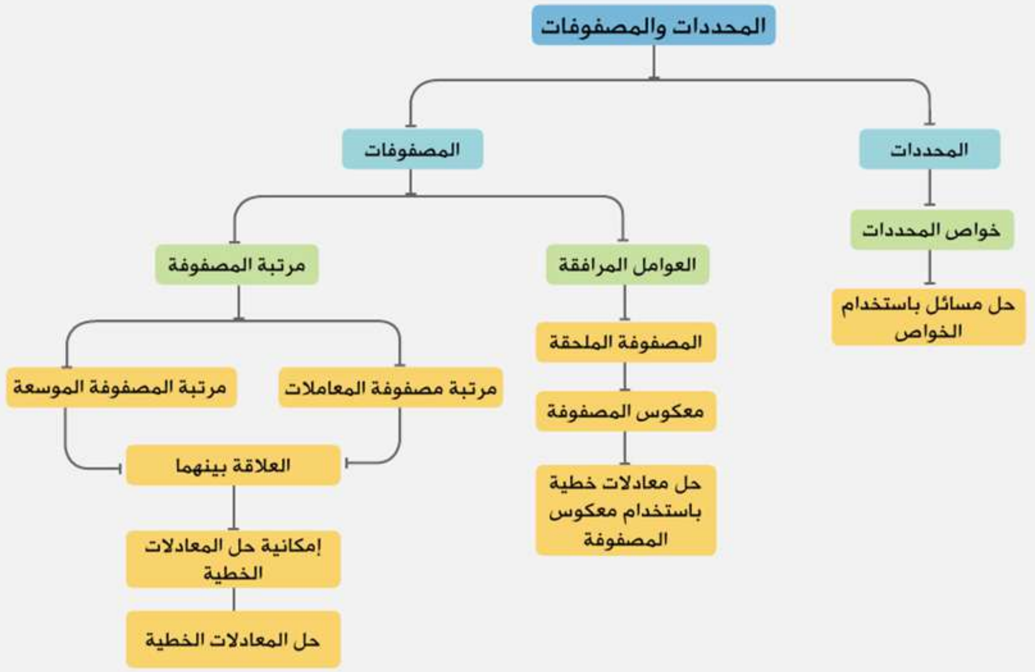
دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): المحددات.

الدرس (٣ - ٢): المصفوفات.

الدرس (٣ - ٣): حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

مخطط تنظيمى للوحدة



الوحدة الثالثة

٣ - ١

المحددات

Determinats

سوف تتعلم

- خواص المحددات.
- حل مسائل متنوعة مستخدمًا خواص المحددات.

مصطلحات أساسية

- محدد Determinants
- محدد الرتبة الثانية Second – order determinant
- محدد الرتبة الثالثة Third – order determinant
- صف Row
- عمود Column
- قطر رئيسي Main diagonal
- صورة مثلثة Triangular form

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

تمهيد

درستَ المصفوفات والمحددات، وعلمتَ بأن كل مصفوفة مربعة لها مُحدِّد المصفوفة و يسمى المحدد ٢ × ٢ بمحدد الرتبة الثانية ومحدد ٣ × ٣ بمحدد الرتبة الثالثة وهكذا...

كما علمتَ كيفية إيجاد قيمة المحدد فمثلًا المحدد: $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{ب} \end{vmatrix} = \text{أء} - \text{ب جـ}$

فمثلا قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٦ & -٥ \end{vmatrix} = ٣ \times ٦ - ٤ (-٥) = ٣٨$

وكذلك تعلمت كيفية إيجاد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ء} & \text{أ} \\ \text{ص} & \text{هـ} & \text{ب} \\ \text{ع} & \text{و} & \text{جـ} \end{vmatrix}$

باستخدام طريقة العوامل المرفقة فإذا رمزنا لقيمة المحدد بالرمز Δ

فتكون $\Delta = \text{أ} \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{هـ} \\ \text{ع} & \text{و} \end{vmatrix} - \text{ء} \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{ب} \\ \text{ع} & \text{جـ} \end{vmatrix} + \text{س} \begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{ب} \\ \text{و} & \text{جـ} \end{vmatrix}$ وذلك باستخدام عناصر الصف الأول

فكر و ناقش

١ اذا كان $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix}$ فإن $\Delta_1 = $ ....

٢ اذا كان $\Delta_2 = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix}$ فإن $\Delta_2 = $ ....

٣ ما العلاقة بين Δ_1 ، Δ_2؟ هل هما متساويان؟ فسر إجابتك.

٤ ما علاقة صفوف المحدد Δ_1 بأعمدة المحدد Δ_2؟ ماذا تستنتج؟

تعلم

الخواص الأساسية للمحددات

خاصية (١)

لا تتغير قيمة المحدد عند تبديل صفوف المحدد بأعمدته المناظرة بنفس الترتيب

$\Delta = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} & ب_{٣٢} \\ جـ_{١٣} & جـ_{٢٣} & جـ_{٣٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ_{١١} & ب_{١٢} & جـ_{١٣} \\ أ_{٢١} & ب_{٢٢} & جـ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & ب_{٣٢} & جـ_{٣٣} \end{vmatrix}$ ويمكن إثبات ذلك بفك كل من المحددين.

مثال

١) أثبت أن $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & -١ \\ ١ & ٠ & ٤ \\ -٢ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ -٣ & ٠ & ٥ \\ -١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$

الحل

$$\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & -١ \\ ١ & ٠ & ٤ \\ -٢ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٢\begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ -٢ & ٢ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٢(٠ - ٢٠) + ٣(٢ + ٨) - (٥ - ٠) = -١٥$$

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ -٣ & ٠ & ٥ \\ -١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ٢\begin{vmatrix} ٠ & ٥ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} -٣ & ٠ \\ -١ & ٤ \end{vmatrix} = ٢(٠ - ٢٠) - (-٦ + ٥) - ٢(-١٢ - ٠) = -١٥$$

لذلك فإن: $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & -١ \\ ١ & ٠ & ٤ \\ -٢ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ -٣ & ٠ & ٥ \\ -١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$

حاول أن تحل

١) أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٥ & ٤ & ١ \\ -١ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٤ & ٣ \\ -٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$

خاصية (٢)

قيمة المحدد لاتتغير بفكه عن طريق عناصر أى صف (عمود).

مثال

٢) أوجد قيمة $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٤ & ٣ \\ ٥ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$ مستخدمًا عناصر العمود الأول مرة ومستخدمًا عناصر الصف الأول مرة أخرى.

الحل

أولاً : باستخدام عناصر العمود الأول

$$\triangle = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (0 + 3) + 5\,(6 + 4) = 53$$

ثانيًا: باستخدام عناصر الصف الأول

$$\triangle = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (0 + 3) - 2\,(0 - 15) - (0 - 20) = 3 + 30 + 20 = 53$$

حاول أن تحل

(٢) أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ مستخدمًا عناصر الصف الأول مرة ومستخدمًا عناصر العمود الثاني مرة أخرى.

خاصية (٣)

قيمة المحدد تنعدم فى الحالتين الآتيتين :

أولًا: اذا كانت جميع عناصر أى صف (عمود) فى محدد تساوى صفر فإن قيمة المحدد = صفر

$$\text{قيمة المحدد} \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

و يمكن إثبات ذلك بفك المحدد باستخدام عناصر الصف الثانى يكون: $\triangle$ = صفر

ثانيًا: إذا تساوت العناصر المتناظرة فى أى صفين (عمودين) فى محدد، فإن قيمة المحدد = صفر

أى إن $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

وذلك لتساوى العناصر المتناظرة فى الصفين الأول والثانى (أثبت ذلك).

مثال

(٣) بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \text{صفر}$

الحل

فى المحدد نجد أن $\text{ص}_3 = \text{ص}_1$ $\quad\therefore$ قيمة المحدد = صفر

حاول أن تحل

(٣) بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$

خاصية (٤)

إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف (عمود) فى محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد.

مثال

(٤) بدون فك المحدد أوجد قيمة $\begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 15 & 10 \end{vmatrix}$

الحل

بأخذ ٢ عامل مشترك من $ص_2$، ٥ عامل مشترك من $ص_3$

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 15 & 10 \end{vmatrix} = 2 \times 5 \begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

وذلك لتساوى العناصر المتناظرة فى $ص_2$ ، $ص_3$ "حاول إثبات ذلك بطريقة أخرى".

حاول أن تحل

(٤) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{م} & \text{ء} & \text{أ} \\ \text{ن} & \text{هـ} & \text{ب} \\ \text{ع} & \text{و} & \text{جـ} \end{vmatrix} = 10$ أوجد فيه $\begin{vmatrix} 2\text{م} & 2\text{ء} & 2\text{أ} \\ \text{ن} & \text{هـ} & \text{ب} \\ -4\text{ع} & -4\text{و} & -4\text{جـ} \end{vmatrix}$

خاصية (٥)

إذا بدلنا موضعى صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج = -قيمة المحدد الأصلى

$$\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ء} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ء} \end{vmatrix}$$

بتبديل الصفين الثانى والثالث وبصوره أخرى تكتب بتبديل $ص_2$، $ص_3$

مثال

(٥) بدون فك المحدد أثبت أن: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \text{صفر}$

الحل

بتبديل الصفين الأول و الثاني فى المحدد الأول

$$\therefore \; -\begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١- & ٢ \\ ٥ & ٧ & ٦ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١- & ٢ \\ ٥ & ٧ & ٦ \end{vmatrix} = -\Delta + \Delta = \text{صفر}$$

خاصية (٦)

إذا كتبت جميع عناصر أى صف "عمود" كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلى على صورة مجموع محددين

$$\begin{vmatrix} أ_{١١}+م & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢}+ن & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣}+هـ & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} م & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ ن & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ هـ & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

ويمكن إثبات ذلك بإيجاد قيمة فك المحددات.

مثال

(٦) بدون فك المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} ل & م & ن \\ -س & ص & ع \\ ق & ك & ر \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -ل & م & ن \\ س & ص & ع \\ -ق & ك & ر \end{vmatrix} = \text{صفرًا}$$

الحل

يمكن كتابة محدد قيمته تساوى مجموع قيمتى المحددين بالطرف الأيمن

(بملاحظة أن المحددين فى الطرف الأيمن يتساوى لهما نفس العمودين $ع_٢$، $ع_٣$ ويجمع المحددين:

$$\text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} ل-ل & م & ن \\ -س+س & ص & ع \\ ق-ق & ك & ر \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & م & ن \\ ٠ & ص & ع \\ ٠ & ك & ر \end{vmatrix} = \text{صفرًا}$$

(لأن عناصر $ع_١$ فى محدد المجموع أصفار)

تفكير ناقد: هل يمكنك استخدام طرق أخرى لإيجاد قيمة المحددات دون فكها؟ أذكر أحدى هذه الطرق.

حاول أن تحل

(٥) أوجد المحدد $م = م_١ + م_٢ + م_٣$ حيث

$$م_١ = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٢- & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١- \end{vmatrix} ،\quad م_٢ = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ١- & ٥ & ٢ \\ ٠ & ٤ & ١- \end{vmatrix} ،\quad م_٣ = \begin{vmatrix} ٢ & ١- & ٤ \\ ٤ & ١ & ٥ \\ ٠ & ١ & ١- \end{vmatrix}$$

خاصية (٧)

إذا أضفنا لعناصر أى صف (عمود) بمحدد مضاعفات عناصر أى صف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ & \text{جـ}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{جـ}_٢ \\ \text{أ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{جـ}_٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}_١ + \text{م}\,\text{أ}_٢ & \text{ب}_١ + \text{م}\,\text{ب}_٢ & \text{جـ}_١ + \text{م}\,\text{جـ}_٢ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{جـ}_٢ \\ \text{أ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{جـ}_٣ \end{vmatrix}$$

أضفنا إلى عناصر الصف الأول عناصر الصف الثانى مضروبه فى م و نرمز لهذه العملية بالرمز $\text{ص}_١ + \text{م}\,\text{ص}_٢$ و يمكن إثبات ذلك بتجزئة عناصر الصف الأول لمحدد الطرف الأيسر تبعًا للخاصية السابقة إلى مجموع محددين أحدهما يعطى محدد الطرف الأيمن والآخر قيمته = صفر

مثال

(٧) بدون فك المحدد أوجد قيمة:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٨ & ١٢ \\ ٩ & ٢١ & ٢٧ \\ ٢٠ & ٤٤ & ٥٢ \end{vmatrix}$$

الحل

بضرب عناصر العمود الأول × -٢ و إضافتهما إلى العناصر المناظرة فى العمود الثانى

أى إن: $-٢\text{ع}_١ + \text{ع}_٢$ وكذلك: $-٢\text{ع}_١ + \text{ع}_٣$

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٨ & ١٢ \\ ٩ & ٢١ & ٢٧ \\ ٢٠ & ٤٤ & ٥٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٨-٢\times٣ & ١٢-٢\times٣ \\ ٩ & ٢١-٢\times٩ & ٢٧-٢\times٩ \\ ٢٠ & ٤٤-٢\times٢٠ & ٥٢-٢\times٢٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٦ \\ ٩ & ٣ & ٩ \\ ٢٠ & ٤ & ١٢ \end{vmatrix}$$

بضرب عناصر العمود الثانى فى -٣ و إضافتها إلى العناصر المناظرة فى العمود الثالث

∴ قيمة المحدد = صفر

حاول أن تحل

(٦) بدون فك المحدد أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & -٧ \\ -٣ & -١ & ٤ \\ ٣ & ١ & -٤ \end{vmatrix}$$

خاصية (٨)

فى أى محدد إذا ضربنا عناصر أى صف (عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى أى صف (عمود) آخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساويًا صفرا.

فى المحدد $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$

حيث عناصر الصف الأول هى $\text{أ}_{١١}$ ، $\text{أ}_{٢١}$ ، $\text{أ}_{٣١}$، العوامل المرافقة المناظرة لعناصر الصف الثانى هى:

$$(-١)^{٢+١} \times \text{م}_{١٢} \text{ ، } (-١)^{٢+٢} \times \text{م}_{٢٢} \text{ ، } (-١)^{٢+٣} \times \text{م}_{٣٢}$$

$$\text{المحدد} = -\text{أ}_{١١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{أ}_{٢١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} - \text{أ}_{٣١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(لأن: $\text{ص}_١ = \text{ص}_٢$)

فمثلًا: إذا كان $\text{أ} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٧ \\ ٣ & -٢ & ١ \\ ١ & ٥ & ٦ \end{vmatrix}$ فإن عناصر $\text{ص}_١$ هى ٢، ٤، ٧

والعوامل المرافقة المناظرة لعناصر الصف الثالث هى:

$$(-١)^{٣+١} \begin{vmatrix} ٤ & ٧ \\ -٢ & ١ \end{vmatrix} \text{ ، } (-١)^{٣+٢} \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} \text{ ، } (-١)^{٣+٣} \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix}$$

أى إن: ١(٤ + ١٤) ، -١(٢ - ٢١) ، ١(-٤ - ١٢)

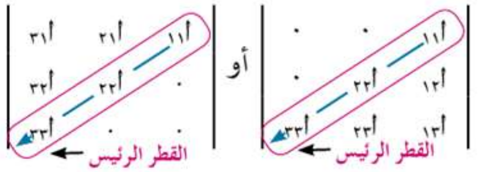
أى إن: ١٨ ، ١٩ ، -١٦

مجموع حواصل ضرب عناصر $\text{ص}_١$ فى العوامل المرافقة لعناصر $\text{ص}_٣$

= ٢ × ١٨ + ٤ × ١٩ + ٧ × -١٦ = صفرًا.

المحدد على الصورة المثلثة

إذا كتب المحدد بإحدى الصورتين ، سُميت هذه الصورة بالصورة المثلثية السفلى والعليا على الترتيب



وتكون جميع عناصر المحدد الواقعة أعلى القطر الرئيس كما فى الحالة الأولى أو أسفله كما فى الحالة الثانية كلها أصفار، كما تسمى العناصر $\text{أ}_{١١}$ ، $\text{أ}_{٢٢}$ ، $\text{أ}_{٣٣}$ بعناصر القطر الرئيسى.

خاصية (٩)

> قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى
> قيمة المحدد من الصورة السابقة = $\text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢} \times \text{أ}_{٣٣}$.

مثال

(٨) بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ١ & \text{ب} & \text{ب}^٢ \\ ١ & \text{جـ} & \text{جـ}^٢ \end{vmatrix} = (\text{أ} - \text{ب})(\text{ب} - \text{جـ})(\text{جـ} - \text{أ})$$

الحل

بضرب عناصر الصف الأول × −١ و إضافتها إلى العناصر المناظره لكل من الصفين الثانى والثالث

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ٠ & \text{ب} - \text{أ} & \text{ب}^٢ - \text{أ}^٢ \\ ٠ & \text{جـ} - \text{أ} & \text{جـ}^٢ - \text{أ}^٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ٠ & \text{ب} - \text{أ} & (\text{ب} - \text{أ})(\text{ب} + \text{أ}) \\ ٠ & \text{جـ} - \text{أ} & (\text{جـ} - \text{أ})(\text{جـ} + \text{أ}) \end{vmatrix}$$

بأخذ (ب − أ)، (جـ − أ) مشتركًا من الثانى والثالث على الترتيب

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{أ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ٠ & ١ & \text{ب} + \text{أ} \\ ٠ & ١ & \text{جـ} + \text{أ} \end{vmatrix}$$

بضرب عناصر الصف الثانى ×-١ و إضافتها إلى العناصر المناظرة فى الصف الثالث

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{أ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ٠ & ١ & \text{ب} + \text{أ} \\ ٠ & ٠ & \text{جـ} - \text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ب} - \text{أ})\ (\text{جـ} - \text{أ})\ (\text{جـ} - \text{ب})$$

$$= (\text{أ} - \text{ب})\ (\text{ب} - \text{جـ})\ (\text{جـ} - \text{أ})$$

٩ حاول أن تحل

(٧) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} - \text{جـ} & ٢\text{ب} & ٢\text{جـ} \\ ٢\text{أ} & \text{ب} - \text{جـ} - \text{أ} & ٢\text{جـ} \\ ٢\text{أ} & ٢\text{ب} & \text{جـ} - \text{أ} - \text{ب} \end{vmatrix} = (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})^٢$$

تمارين (٣ - ١)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ى} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = ١٢$ فإن $\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{و} & \text{ى} & \text{هـ} \\ \text{جـ} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} =$

أ -١٢ ب -٦ جـ ٦ د ١٢

(٢) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ى} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = ١٥$ فإن $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ى} & \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} =$

أ -٣٠ ب -١٥ جـ صفر د ١٥

(٣) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix} =$

أ صفر ب أجـ جـ ب جـ د أب جـ

(٤) $\begin{vmatrix} \text{أب} & \text{أ} & \frac{١}{\text{جـ}} \\ \text{أجـ} & \text{جـ} & \frac{١}{\text{ب}} \\ \text{ب جـ} & \text{ب} & \frac{١}{\text{أ}} \end{vmatrix} =$

أ صفر ب ١ جـ ٢ د ٥

(٥) $\begin{vmatrix} \text{س - ص} & \text{ص - ع} & \text{ع - س} \\ \text{ص - ع} & \text{ع - س} & \text{س - ص} \\ \text{ع - ص} & \text{س - ص} & \text{ص - ع} \end{vmatrix} =$

أ صفر ب س - ص جـ ص - ع د ع - س

(٦) إذا كانت $\text{ت}^٢ = -١$ فإن $\begin{vmatrix} ١ & \text{ت} & \text{ت} + ١ \\ ٠ & ١ & \text{ت} - ١ \\ ٠ & \text{ت} & \text{ت} \end{vmatrix} =$

أ ٢ت - ١ ب ٢ت + ١ جـ ت د ١

(٧) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} \text{٣س} & \text{٢س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{٢س} & \text{٣س} \\ \text{٠} & \text{-س} & \text{س} \end{vmatrix}$ = ٩٦ في ح هي

(أ) ٤ (ب) ٣ (ج) ٢ (د) -٢

(٨) في △ ا ب جـ يكون $\begin{vmatrix} \text{جـ}' & \text{ب}' & \text{أ}' \\ \text{٨} & \text{٧} & \text{٥} \\ \text{جاجـ} & \text{جاب} & \text{جاا} \end{vmatrix}$ =

(أ) ٥أ′ (ب) ٧ب′ (ج) ٨جـ′ (د) صفر

(٩) إذا كان ن = $\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٥} & \text{٣} & \text{٢} \\ \text{٢} & \text{٤} & \text{١} \end{vmatrix}$ ، م = $\begin{vmatrix} \text{٩} & \text{٠} & \text{٣} \\ \text{١٠} & \text{٦} & \text{٤} \\ \text{١٠} & \text{٢٠} & \text{٥} \end{vmatrix}$ فإن م =

(أ) ن (ب) ١٠ن (ج) ٢٠ن (د) ٣٠ن

(١٠) $\begin{vmatrix} \text{٩} & \text{-١} & \text{١} \\ \text{-٧} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{٧} & \text{-٩} \end{vmatrix}$ =

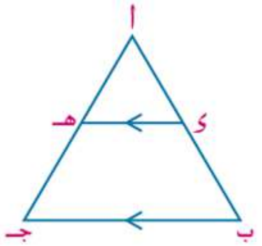
(أ) -٩ (ب) -٧ (ج) ٤٩ (د) صفر

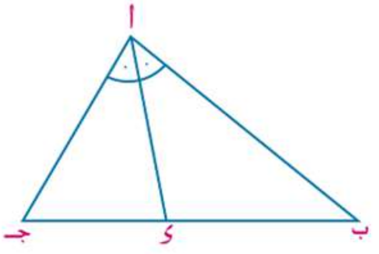
(١١) أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{س}^{٢} & \text{س} & \text{١} \\ \text{ص}^{٢} & \text{ص} & \text{١} \\ \text{ع}^{٢} & \text{ع} & \text{١} \end{vmatrix}$ = (س - ص) (ص - ع) (ع - س)

ثم أوجد قيمة المحدد العددية إذا كان س - ص = ٥ ، ص - ع = ٧

(١٢) الربط بالهندسة: في الشكل المقابل $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٢} & \text{١} \\ \text{اهـ} & \text{اء} & \text{ءهـ} \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{ب جـ} \end{vmatrix}$ = صفر





(١٣) في الشكل المقابل:

أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{٢} & \text{٣} & \text{٥} \\ \text{اب} & \text{اجـ} & \text{اب} + \text{اجـ} \\ \text{ب ء} & \text{ء جـ} & \text{ب جـ} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

(١٤) أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{جا}^{\text{٢}}\text{س} & \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} & \text{١} \\ \text{جا}^{\text{٢}}\text{ص} & \text{جتا}^{\text{٢}}\text{ص} & \text{١} \\ \text{جا}^{\text{٢}}\text{ع} & \text{جتا}^{\text{٢}}\text{ع} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

باستخدام خواص المحددات حل المعادلات الآتية:

(١٥) $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{١} & \text{س} \\ \text{٢} & \text{٣} & \text{٤} \\ \text{س} & \text{٥} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{١٦}$

(١٦) $\begin{vmatrix} \text{١} & -\text{س} & \text{٠} \\ \text{س} & \text{١} & \text{س} \\ \text{١} & -\text{١} & \text{س} + \text{١} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س}^{\text{٢}} & \text{١} \\ -\text{س} & \text{س} \end{vmatrix}$

(١٧) $\begin{vmatrix} \text{٢} & -\text{س} & \text{١} \\ \text{١} & -\text{١} & \text{٠} \\ \text{س} + \text{١} & \text{١} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{٢ س} + \text{١}$

(١٨) $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{١} & \text{٢} \\ \text{١} & \text{س} & \text{٢} \\ \text{١} & \text{٢} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{س} - \text{١}$

باستخدام خواص المحددات أثبت أن:

(١٩) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ا}^{\text{٢}} & \text{ب}^{\text{٢}} & \text{جـ}^{\text{٢}} \end{vmatrix} = (\text{ب}-\text{ا})(\text{جـ}-\text{ا})(\text{جـ}-\text{ب})$

(٢٠) $\begin{vmatrix} \text{ا} - \text{ب} - \text{جـ} & \text{٢ا} & \text{٢ا} \\ \text{٢ب} & \text{ب} - \text{جـ} - \text{ا} & \text{٢ب} \\ \text{٢جـ} & \text{٢جـ} & \text{جـ} - \text{ا} - \text{ب} \end{vmatrix} = (\text{ا} + \text{ب} + \text{جـ})^{\text{٣}}$

(٢١) $\begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{جـ}^{\text{٢}} & \text{ب}^{\text{٢}} \\ \text{جـ}^{\text{٢}} & \text{جـا} & \text{ا}^{\text{٢}} \\ \text{ب}^{\text{٢}} & \text{ا}^{\text{٢}} & \text{اب} \end{vmatrix} = \text{ا ب جـ} \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{جـ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{جـ} \end{vmatrix}$

(٢٢) $\begin{vmatrix} \text{ص} + \text{ع} & \text{س} & \text{س} \\ \text{ص} & \text{ع} + \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{س} + \text{ص} \end{vmatrix} = \text{٤ س ص ع}$

(٢٣) بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & -\text{ص} \end{vmatrix} = \text{س}^{\text{٢}} - \text{ص}^{\text{٢}}$

بدون فك المحدد أوجد قيمة:

(٢٤) $\begin{vmatrix} \text{٥} & -\text{١} & \text{١٠} \\ \text{٤} & \text{٢} & \text{٨} \\ -\text{٥} & \text{٢} & -\text{١٠} \end{vmatrix}$

(٢٥) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٢} & \text{٣} \\ \text{٢} & -\text{٣} & -\text{١} \\ -\text{٤} & \text{٦} & \text{٢} \end{vmatrix}$

بأستخدام خواص المحدودات أثبت أن:

٢٦
$$\begin{vmatrix} \text{(س + ص)}^{٢} & \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} & \text{٣س ص} \\ \text{(ع + ل)}^{٢} & \text{ع}^{٢} + \text{ل}^{٢} & \text{٣ ع ل} \\ \text{(م + ن)}^{٢} & \text{م}^{٢} + \text{ن}^{٢} & \text{٣م ن} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

٢٧
$$\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{ل} & -\text{م} \\ -\text{ل} & \text{٠} & -\text{ن} \\ \text{م} & \text{ن} & \text{٠} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

٢٨
$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{م ن} & \text{س ص + ع ل} \\ \text{١} & \text{س ص} & \text{م ن + ع ل} \\ \text{١} & \text{ع ل} & \text{س ص + م ن} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

بدون فك المحدد أثبت أن:

٢٩
$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{(س + ٢أ)(س - أ)}^{٢}$$

٣٠
$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{س} & \text{١ + س}^{٢} & \text{س ص} \\ \text{ص} & \text{س ص} & \text{١ + ص}^{٢} \end{vmatrix} = \text{١}$$

٣١
$$\begin{vmatrix} \text{س} & -\text{ص} & -\text{ع} \\ \text{ص} & \text{١} & \text{٠} \\ \text{ع}^{٢} & \text{٠} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{س + ص}^{٢} + \text{ع}^{٣}$$

٣٢ بإستخدام خواص المحددات

أثبت أن
$$\begin{vmatrix} \text{٢} & \text{٤} & \text{٣} \\ \text{-٥} & \text{-١} & \text{-٧} \\ \text{١} & \text{٥} & \text{٢} \end{vmatrix} + \frac{\text{١}}{\text{٤}} \begin{vmatrix} \text{٤} & \text{٦} & \text{٢} \\ \text{٨} & \text{٦} & \text{١٠} \\ \text{٦} & \text{٩} & \text{٤} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

٣٣ بدون فك المحددات أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{جـ} & \text{أ} \end{vmatrix} = \text{(أ - ب)(أ - جـ)(أ + ب + جـ)}$$

٣٤ باستخدام خواص المحدودات

أثبت أن
$$\begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{أب} & \text{١} \\ \text{أجـ} & \text{ب}^{٢} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ} & \text{أ} \end{vmatrix} = \text{(أ + ب)} \begin{vmatrix} \text{١} & \text{ب} & \text{١} \\ \text{أ} & \text{ب}^{٢} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ}^{٢} & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

(٣٥) بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{أ}^{٢}+\text{١} & \text{أب} & \text{أجـ} \\ \text{أب} & \text{ب}^{٢}+\text{١} & \text{ب جـ} \\ \text{أجـ} & \text{ب جـ} & \text{جـ}^{٢}+\text{١} \end{vmatrix} = \text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٢}+\text{١}$$

(٣٦) بدون فك المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{١}+\text{أ} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١}+\text{ب} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{١}+\text{جـ} \end{vmatrix} = \text{أ ب جـ}\left(\frac{\text{١}}{\text{أ}}+\frac{\text{١}}{\text{ب}}+\frac{\text{١}}{\text{جـ}}+\text{١}\right)$$

(٣٧) إذا كان

$$\begin{vmatrix} \text{أ}^{٣}-\text{١} & \text{أ}^{٢} & \text{أ} \\ \text{ب}^{٣}-\text{١} & \text{ب}^{٢} & \text{ب} \\ \text{جـ}^{٣}-\text{١} & \text{جـ}^{٢} & \text{جـ} \end{vmatrix} = \text{صفر} \qquad \text{حيث } \text{أ} \neq \text{ب} \neq \text{جـ}$$

أثبت أن أ ب جـ = ١

(٣٨) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب جـ} & \text{جـ أ} & \text{أب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{١} & \text{أ} & \text{أ}^{٢} \\ \text{١} & \text{ب} & \text{ب}^{٢} \\ \text{١} & \text{جـ} & \text{جـ}^{٢} \end{vmatrix}$$

(٣٩) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{أ}^{٢} & \text{أ}^{٢} \\ \text{ب}^{٢} & \text{جـ أ} & \text{ب}^{٢} \\ \text{جـ}^{٢} & \text{جـ}^{٢} & \text{أب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{أب} & \text{جـ أ} \\ \text{أ ب} & \text{جـ أ} & \text{ب جـ} \\ \text{أ جـ} & \text{ب جـ} & \text{أب} \end{vmatrix}$$

الوحدة الثالثة

٣ - ٢

المـصـفوفـات

Matrices

سوف تتعلم

- مصفوفة العوامل المرافقة.
- المعكوس الضربى لمصفوفة مربعة على نظم ٣ × ٣.
- حل معادلة خطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة.
- المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة.
- مرتبة مصفوفة المعادلات.
- مرتبة مصفوفة المعاملات الموسعة.
- العلاقة بين مرتبة مصفوفة المعاملات و مصفوفة المعاملات الموسعة وإمكانية الحل.

مصطلحات أساسية

- معكوس ضربى للمصفوفة *Inveres of a Matrix*
- العوامل المرافقة *Cofactors*
- المصفوفة الملحقة *Adjoint matrix*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific Calculator*

تمهيد

تعرفت فيما سبق بأن المصفوفة هى مجموعة من العناصر موضوعة فى جدول مرتبة م صفًا، ن عمودًا و محاطة بقوسين على الصورة (   ) ويرمز لها بأحد الحروف الهجائية و يكتب نظم المصفوفة على الصورة م × ن

المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٥ & ١ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢

كذلك المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & -١ \\ ٢ & ١ & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣

بينما المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٠ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٣

وتستخدم المصفوفات بشكل تطبيقى فى التحويلات الخطية وفي حل نظام من المعادلات الخطية كما تستخدم فى مجالات عديدة فى العلوم المختلفة كالميكانيكا ومعظم فروع الفيزياء والرسوم البيانية المعدة بالكمبيوتر وفى الاحصاء ونظرية الاحتمالات.

المعكوس الضربى للمصفوفة

Inveres of a Matrix

سبق أن درست كيفية إيجاد المعكوس الضربى (إن وجد) للمصفوفة المربعة من النظم ٢ × ٢ **وعلمت أن:**

إذا كان أ، ب مصفوفتين مربعتين على النظم ٢ × ٢ **وكان** أ ب = ب أ = I **فإن** كل من أ ، ب معكوسًا ضربيًا للأخرى .

مع ملاحظة أن بعض المصفوفات ليس لها معكوسًا ضربيًا.

> **تذكر أن**
>
> **مصفوفة الوحدة I هى مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسى ١ وباقى العناصر أصفار**
>
> $I_٢ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$
>
> $I_٣ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

فإذا كان أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة أ يكون معرفًا عندما يكون محدد أ = $\Delta \neq ٠$ فإن:

$$أ^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$$

مثال

(١) أوجد المعكوس الضربى إن وجد لكل من:

(أ) أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$ (ب) ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$

الحل

(أ) نوجد محدد المصفوفة Δ = $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix}$ = ١٢ - ١٢ = صفر

$\therefore$ لا يوجد معكوس ضربى للمصفوفة

(ب) نوجد محدد المصفوفة Δ = $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٦ - ٤ = ٢

$\therefore$ يوجد معكوس ضربى للمصفوفة و نرمز له بالرمز ب$^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$ $\begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

حاول أن تحل

(١) أوجد قيم أ التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ٩ \\ ٤ & أ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى.

تذكر أن

إذا كان $\Delta \neq$ ٠ فإن: للمصفوفة أ معكوس ضربيًا يتعين كالآتى:

أ) تبادل بين وضعى العنصرين الواقعين على القطر الرئيس للمصفوفة أ.

ب) نغير كلًّا من إشارتى العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة أ

جـ) نضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء (أ)، (ب) بالعدد $\frac{١}{\Delta}$ فنحصل على أ$^{-١}$

المعكوس الضربى للمصفوفة من النظم ٣ × ٣

Inveres of a matrix of 3 × 3 systems

إذا كان |أ| $\neq$ صفر أى أن محدد هذه المصفوفة لا يساوى صفرًا فإنه يوجد معكوس ضربى للمصفوفة أ و يرمز له بالرمز أ$^{-١}$ وهو مصفوفة مربعة أيضًا حيث أ أ$^{-١}$ = أ$^{-١}$ أ = I، حيث "I مصفوفة الوحدة"

أضف إلى معلوماتك

- المصفوفة المنفردة "الشاذة" هى المصفوفة التى ليس لها معكوس ضربى Δ = صفر
- المصفوفة غير منفردة "غير الشاذة" هى المصفوفة التى لها معكوس ضربى $\Delta \neq$ صفر

مثال

(٢) حدد ما إذا كانت المصفوفة أ حيث أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ -١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٠ & -١ \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربى أم لا؟ وضح إجابتك.

الحل

نوجه قيمة محدد المصفوفة المربعة أ على النحو الآتى:

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ -١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٠ & -١ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{vmatrix} - (-١) \begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix}$$

= ٣ (-٢ - ٠) + (١ - ١) + ٢ (٠ - ٢) = -٦ - ٠ - ٤ = -١٠

$\because$ |أ| $\neq$ ٠ $\therefore$ يوجد للمصفوفة معكوس ضربى

حاول أن تحل

(٢) حدد هل للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ معكوس ضربى؟

العوامل المرافقة *Adjoimt Factors*

إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ ومحددها | أ |، فإن:

العامل المرافق للعنصر $\text{أ}_{\text{ص ع}}$ هو قيمة المحدد الأصغر المقابل للعنصر $\text{أ}_{\text{ص ع}}$ والناتج من حذف الصف والعمود واللذان يقع فى تقاطعهما العنصر $\text{أ}_{\text{ص ع}}$ مضروبًا فى $(-١)^{\text{ص}+\text{ع}}$ على ذلك تكون مصفوفة المرافقات للمصفوفة أهى:

$$\text{م} = \begin{pmatrix} (-١)^{١+١}\begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} & (-١)^{٢+١}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} & (-١)^{٣+١}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix} \\ (-١)^{١+٢}\begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} & (-١)^{٢+٢}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} & (-١)^{٣+٢}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix} \\ (-١)^{١+٣}\begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \end{vmatrix} & (-١)^{٢+٣}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٣٢} \end{vmatrix} & (-١)^{٣+٣}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

مثال

(٣) أوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$

الحل

نوجد العوامل المترافقة للمصفوفة أ على النحو التالى:

$\text{م}_{١١} = (-١)^{١+١}\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٢$ ، $\text{م}_{٢١} = (-١)^{٢+١}\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = -٢$ ، $\text{م}_{٣١} = (-١)^{٣+١}\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١$

$\text{م}_{١٢} = (-١)^{١+٢}\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٢$ ، $\text{م}_{٢٢} = (-١)^{٢+٢}\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = -١$ ، $\text{م}_{٣٢} = (-١)^{٣+٢}\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$

$\text{م}_{١٣} = (-١)^{١+٣}\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = -٥$ ، $\text{م}_{٢٣} = (-١)^{٢+٣}\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٤$ ، $\text{م}_{٣٣} = (-١)^{٣+٣}\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = -١$

ويمكن تلخيص قاعدة الإشارات التى تربط بين المحددات الصغرى والعوامل المرفقة لاى عنصرفى أى مصفرفة مربعة كما يلى: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

لذلك فإن مصفوفة المرافقات هى: $\text{م} = \begin{pmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ٢ & -١ & ٠ \\ -٥ & ٤ & -١ \end{pmatrix}$

حاول أن تحل

(٣) أوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٣ \\ ٠ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ٦ & ٧ \end{pmatrix}$

المصفوفة الملحقة *Adjoint matrix*

تسمى المصفوفة الناتجة من إيجاد مدور مصفوفة العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة أ بالمصفوفة الملحقة للمصفوفة أ و يرمز لها بالرمز $(\text{أ})^{\text{مل}}$

$$(\text{أ})^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} \bar{\text{أ}}_{١١} & \bar{\text{أ}}_{٢١} & \bar{\text{أ}}_{٣١} \\ \bar{\text{أ}}_{١٢} & \bar{\text{أ}}_{٢٢} & \bar{\text{أ}}_{٣٢} \\ \bar{\text{أ}}_{١٣} & \bar{\text{أ}}_{٢٣} & \bar{\text{أ}}_{٣٣} \end{pmatrix}$$

ففى المثال السابق تكون (أ)^{مل} = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

مثال

(٤) أوجد المصفوفة الملحقة للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

الحل

نوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 15 & 2 & -10 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$\therefore$ ب^{مل} = $\begin{pmatrix} 7 & 15 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & -10 & 4 \end{pmatrix}$

تفكير ناقد من المثال السابق أوجد قيمة كل من: ب ب^{مل} ، ب^{مل}ب ماذا تلاحظ ؟

إيجاد معكوس المصفوفة المربعة من النظم ٣×٣ *Finding invers of asquare matrix*

لإيجاد المعكوس الضربى لمصفوفة أ التى على النظم ٣×٣ باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة من الممكن أن نتبع الخطوات التالية:

- نوجِد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة |أ| $\neq$ صفر
- نُكوِّن مصفوفة العوامل المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة أ
- نوجِد المصفوفة الملحقة أ^{مل} (مدور مصفوفة العوامل المرافقة)
- نوجِد المعكوس الضربى للمصفوفة أ من العلاقة

$$أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \times أ^{مل}$$

مثال

(٥) أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

الحل

نوجد محدد المصفوفة أ باستخدام عناصر الصف الأول "إختيارى"

$|أ| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2\,(0 - 20) + 1\,(0 - 5) + 3\,(16 - 3) = -40 - 5 + 39 = -6$

نوجد مصفوفة العوامل المرافقة $= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -20 & 5 & 13 \\ 12 & -3 & -9 \\ -14 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

نوجد أ$^{\text{مل}}$ "مدور مصفوفة العوامل المرفقة"

أ$^{\text{مل}}$ $= \begin{pmatrix} -20 & 12 & -14 \\ 5 & -3 & 2 \\ 13 & -9 & 10 \end{pmatrix}$ فيكون أ$^{-1}$ $= \frac{1}{|\text{أ}|} \times$ أ$^{\text{مل}}$ $= \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -20 & 12 & -14 \\ 5 & -3 & 2 \\ 13 & -9 & 10 \end{pmatrix}$

حاول أن تحل

(٤) أوجد المعكوس الضربى لكل المصفوفات الآتية إن أمكن:

أ $= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ ب $= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

بعض خواص معكوس المصفوفة: *Some properties of inverse of a matrix*

إذا كانت أ، ب مصفوفتان غير منفردتين فإن:

١ (أ ب)$^{-1}$ = ب$^{-1}$ أ$^{-1}$

٢ (أ$^{-1}$)$^{-1}$ = أ (معكوس معكوس المصفوفة أ = المصفوفة أ)

٣ (أ$^{-1}$)$^{\text{مد}}$ = (أ$^{\text{مد}}$)$^{-1}$ (مدور المعكوس = معكوس المدور)

٤ (أ$^{-1}$)^{2} = (أ^{2})$^{-1}$ (مربع المعكوس = معكوس المربع)

٥ $(I)^{-1} = I$ (معكوس مصفوفه الوحدة = مصفوفة الوحدة)

تذكر أن

المصفوفة المنفردة:
محددها = صفر
المصفوفة غير المنفردة:
محددها ≠ صفر

مثال

(٦) إذا كانت: أ $= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$، ب $= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ فحقق الخواص التالية:

أولًا: (أ ب)$^{-1}$ = ب$^{-1}$ أ$^{-1}$ **ثانيًا:** (أ$^{-1}$)$^{-1}$ = أ

الحل

|أ| = ٣ × ٢ - (-١) = ٧ ، |ب| = ٢ × ٥ - ١ (-١) = ١١

$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{٧}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{pmatrix}$ ، $\text{ب}^{-١} = \frac{١}{١١}\begin{pmatrix} ١- & ٥ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

أولًا:

$$\text{أ ب} = \begin{pmatrix} ١- & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ١- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢- & ٧ \\ ١١ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\text{أ ب}| = ٧٧$$

$$\therefore (\text{أ ب})^{-١} = \frac{١}{٧٧}\begin{pmatrix} ٢ & ١١ \\ ٧ & ٠ \end{pmatrix} \qquad (١)$$

$$\text{ب}^{-١}\,\text{أ}^{-١} = \frac{١}{١١}\begin{pmatrix} ١- & ٥ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} \times \frac{١}{٧}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{٧٧}\begin{pmatrix} ٢ & ١١ \\ ٧ & ٠ \end{pmatrix} \qquad (٢)$$

من (١)، (٢) $\therefore (\text{أ ب})^{-١} = \text{ب}^{-١}\,\text{أ}^{-١}$

ثانيًا:

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{٧}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٧} & \frac{٢}{٧} \\ \frac{٣}{٧} & \frac{١-}{٢} \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\text{أ}^{-١}| = \frac{٢}{٧} \times \frac{٣}{٧} + \frac{١}{٧} \times \frac{١}{٧}$$

$$= \frac{٦}{٤٩} + \frac{١}{٤٩} = \frac{١}{٧}$$

$$\therefore (\text{أ}^{-١})^{-١} = ٧\begin{pmatrix} \frac{١}{٧}- & \frac{٣}{٧} \\ \frac{٢}{٧} & \frac{١}{٧} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} = \text{أ}$$

أى أن $(\text{أ}^{-١})^{-١} = \text{أ}$

حاول أن تحل

(٥) فى المثال السابق تحقق من الخواص الآتية:

أولًا: $(\text{أ}^{-١})^{\text{مد}} = (\text{أ}^{\text{مد}})^{-١}$ **ثانيًا:** $(\text{أ}^{-١})^{٢} = (\text{أ}^{٢})^{-١}$

تمارين (٣ – ٢)

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الآتية:

(١) المصفوفة المنفردة من بين المصفوفات التالية هى:

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢- & ٣ \\ ٤- & ٦ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣- \end{pmatrix}$

(٢) قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & \text{س} \\ ٢ & ٤- \end{pmatrix}$ منفردة هى:

(أ) $٢-$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٣) جميع المصفوفات الآتية لها معكوس ضربى ما عدا المصفوفة:

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ١- \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٣- & ١ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ٦ & ٤- \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

(٤) إذا كانت أ مصفوفة غير منفردة فإن $(\text{أب})^{-١}$ تساوى:

(أ) $-\text{أ ب}$ (ب) $\text{أ}^{-١}\,\text{ب}^{-١}$ (ج) $\text{ب}^{-١}\,\text{أ}^{-١}$ (د) $(\text{ب أ})^{-١}$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٥) أوجد قيمة س التى تجعل كلًّا من المصفوفات الآتية منفردة:

(أ) $\begin{pmatrix} \text{س - ٣} & \text{٢} \\ \text{٧} & \text{س + ٢} \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \text{٣} & \text{-١} & \text{٣} \\ \text{٢س} & \text{٣س} & \text{س + ١} \\ \text{٤} & \text{٢} & \text{٤} \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} \text{س + ٤} & \text{٢} & \text{١} \\ \text{٣} & \text{٤} & \text{٥} \\ \text{٧} & \text{س - ١} & \text{١} \end{pmatrix}$

(٦) أوجد المعكوس الضربى لكل من المصفوفات الآتية:

(أ) $\begin{pmatrix} \text{٤} & \text{٥} \\ \text{٢} & \text{٣} \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \text{٣} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٣} \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} \text{جا}\theta & \text{-جتا}\theta \\ \text{جتا}\theta & \text{جا}\theta \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} \text{قا}\theta & \text{ظا}^{2}\theta \\ \text{١} & \text{قا}\theta \end{pmatrix}$

(هـ) $\begin{pmatrix} \text{٣} & \text{٠} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٣} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{٣} \end{pmatrix}$ (و) $\begin{pmatrix} \text{١} & \text{٣} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{١} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \end{pmatrix}$ (ز) $\begin{pmatrix} \text{١} & \text{٠} & \text{٠} \\ \text{٣} & \text{١} & \text{٠} \\ \text{-٥} & \text{٠} & \text{١} \end{pmatrix}$ (ح) $\begin{pmatrix} \text{١} & \text{٢} & \text{٣} \\ \text{٢} & \text{٣} & \text{١} \\ \text{٣} & \text{١} & \text{٢} \end{pmatrix}$

(٧) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} \text{١} & \text{-١} \\ \text{٢} & \text{٠} \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} \text{٣} & \text{٥} \\ \text{١} & \text{٢} \end{pmatrix}$ فحقق أن $(\text{أ ب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1}$

(٨) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} \text{١} & \text{٢} & \text{٣} \\ \text{٠} & \text{-٢} & \text{-١} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{-٣} \end{pmatrix}$ فحقق أن: $(\text{أ}^{\text{مد}})^{-1} = (\text{أ}^{-1})^{\text{مد}}$

(٩) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} \text{-٣} & \text{٤} & \text{٠} \\ \text{٢} & \text{-١} & \text{٥} \\ \text{١} & \text{٠} & \text{-٢} \end{pmatrix}$ فحقق أن: $(\text{أ}^{2})^{-1} = (\text{أ}^{-1})^{2}$

(١٠) تفكير إبداعى: إذا كان أ = $\begin{pmatrix} \text{٣} & \text{٢} \\ \text{١٠} & \text{٤} \end{pmatrix}$ فأثبت أن $\text{أ}^{2} - \text{٧أ} - \text{٨}I = \square$

ثم استخدم ذلك فى إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ

الوحدة الثالثة

٣ - ٣

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

Solving Linear Equations Using Matrix Inverse

سوف تتعلم

- أنظمة المعادلات الخطية
- استخدام الآله الحاسبة العلمية
- تحويل معادلة المصفوفة إلى معادلات خطية
- إيجاد مرتبة المصفوفة
- إمكانية حل المعادلات عن طريق المصفوفة الموسعة

مصطلحات أساسية

- معادلة مصفوفية *matrix equation*
- مرتبة المصفوفة *Rank of a matrix*
- معادلة متجانسة *Homogenuous equation*
- معادلة غير متجانسة *Non Homgenuous equation*
- المصفوفة الموسعة *Augmented Matrix*
- معادلات خطية *Linear Equations*
- مصفوفة العوامل *Co factor matrix*

فكر و ناقش

سبق أن استخدمت طرقا جبرية مختلفة لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية الآتية:

٢س + ٣ص = ٧ ، ٣س - ص = ٥

فهل يمكنك تمثيل المعادلات السابقة على صورة معادلة مصفوفية و إيجاد حل هذه المعادلات؟

تمثل المعادلة المصفوفية منظومة كاملة من المعادلات

معادلة المصفوفة	نظام المعادلات
$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ٥ \end{pmatrix}$	٢س + ٣ص = ٧ ٣س - ص = ٥

■ قارن بين نظام المعادلات فى صورته الجبرية ونظام المعادلة المصفوفية، وحدد أين توجد مصفوفة المعاملات، مصفوفة المتغيرات، ومصفوفة الثوابت.

مصفوفة المعاملات أ		مصفوفة المتغيرات سـ		مصفوفة الثوابت ب
$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١- \end{pmatrix}$	×	$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$	=	$\begin{pmatrix} ٧ \\ ٥ \end{pmatrix}$

لذلك يمكن كتابة المعادلة المصفوفية بالصورة: أ سـ = ب

■ هل يمكنك إيجاد ناتج ضرب المصفوفتين $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ؟

■ قارن بين عدد أعمدة الأولى وعدد صفوف الثانية - ماذا تلاحظ؟

■ ناتج الضرب الذى حصلت عليه يجب أن يساوى $\begin{pmatrix} ٧ \\ ٥ \end{pmatrix}$

■ هل يمكنك استخدام معكوس المصفوفة فى الدرس السابق لحل المعادلة المصفوفية؟

أنظمة المعادلات الخطية *Systems of linear Equations*

يمكن حل عدد «ن» من المعادلات الخطية التى تحتوى على «ن» من المتغيرات والتى لها حل وحيد باستخدام ضرب المصفوفات عندما تكون ن = ٢ أو ن = ٣

وباعتبار أن نظام المعادلات هو:

أ$_1$ س + ب$_1$ ص + جـ$_1$ ع = د$_1$

أ$_2$ س + ب$_2$ ص + جـ$_2$ ع = د$_2$ **فنحصل على أسـ = ب**

أ$_3$ س + ب$_3$ ص + جـ$_3$ ع = د$_3$

حيث أ = $\begin{pmatrix} أ_1 & ب_1 & جـ_1 \\ أ_2 & ب_2 & جـ_2 \\ أ_3 & ب_3 & جـ_3 \end{pmatrix}$ ، سـ = $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} د_1 \\ د_2 \\ د_3 \end{pmatrix}$

أ$^{-1}$ (أ × سـ) = أ$^{-1}$ × ب **بضرب طرفى المعادلة فى أ$^{-1}$**

(أ$^{-1}$ × أ) × سـ = أ$^{-1}$ × ب **خاصية التجميع**

I × سـ = أ$^{-1}$ ب **لأن I عنصر محايد**

سـ = أ$^{-1}$ ب

لاحظ أن: حل المعادلة المصفوفية أسـ = ب هو حاصل ضرب المعكوس الضربى لمصفوفة المعاملات فى مصفوفة الثوابت.

مثال

(١) حل المعادلات الآتية: ٤س + ص = ٠ ، س + ٢ع = ١٥ ، ص - ٧ع = ٠ باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفات

الحل

تكتب المعادلة المصفوفية أ سـ = ب حيث

أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & -٧ \end{pmatrix}$ ، سـ = $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$

نوجِد المعكوس الضربى للمصفوفة باستخدام مصفوفة العوامل المرفقة

محدد أ = Δ = $\begin{vmatrix} ٤ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & -٧ \end{vmatrix}$ = ٤(-٢) - ١(-٧) = -١

مصفوفة العوامل المرافقة = $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & -٧ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & -٧ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & -٧ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & -٧ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ١ & ٧ & ٢- \\ ٤- & ٢٨- & ٧ \\ ١- & ٨- & ٢ \end{pmatrix} \qquad \text{أمل} = \begin{pmatrix} ٢ & ٧ & ٢- \\ ٨- & ٢٨- & ٧ \\ ١- & ٤- & ١ \end{pmatrix}$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times \text{أمل} = \frac{١}{١-} \begin{pmatrix} ٢ & ٧ & ٢- \\ ٨- & ٢٨- & ٧ \\ ١- & ٤- & ١ \end{pmatrix} \qquad \therefore \text{س} = أ^{-١}\text{ب}$$

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{١}{١-} \begin{pmatrix} ٢ & ٧ & ٢- \\ ٨- & ٢٨- & ٧ \\ ١- & ٤- & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ \\ ١٥ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠٥- \\ ٤٨٠ \\ ٦٠ \end{pmatrix}$$

∴ س = -١٠٥ ، ص = ٤٨٠ ، ع = ٦٠ مجموعة الحل = {(-١٠٥ ، ٤٨٠ ، ٦٠)}

حاول أن تحل

(١) حل المعادلات الآتية:

٢س - ٣ص - ع = ٩ ، س + ٢ص + ٣ع = ١٥ ، س - ٢ع = ١٢

باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفات

استخدام الآلة الحاسبة العلمية Use of Scientific Calculator

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العملية فى حل مجموعة المعادلات الخطية فى ٣ مجاهيل على النحول التالى:

اضغط على المفاتيح MODE فتظهر القائمة التالية:

General Calculations	MODE 1 (COMP)
Complex number calculations	MODE 2 (CMPLX)
Statistical and regression calculations	MODE 3 (STAT)
Calculations involving specific number systems (binary, octal, decimal, hexadeiaml)	MODE 4 (BASE-N)
Equation solution	MODE 5 (EQN)
Matrix calculations	MODE 6 (MATRIX)
Generate a number table based on one or two functions.	MODE 7 (TABLE)
Vector calculations	MODE 8 (VECTOR)
Inequality solution	MODE ▼ 1 (INEQ)
Verify a calculation	MODE ▼ 2 (VERIF)
Distribution calculations	MODE ▼ 3 (DIST)

اختر من (EQN) [5] فتظهر لك القائمة التالية:

To select this calculation Type:	*Press this key:*
Simultaneous linear equations with two unknowms	[1] $(a_nX + b_nY = C_n)$
Simultaneous linear equations with three unknowms	[2] $(a_nX + b_nY = C_nZ = d_n)$
Quadratic equation	[3] $(aX^2 + bX = 0)$
Cubic equation	[4] $(aX^3 + bX^2 + cX + d = 0)$

اختر منه [2] وذلك بالضغط عليه ولتكن المعادلات المعطاة هى:

س - ص + ع = ٢ ، س + ص - ع = ٠ ، -س + ص + ع = ٤

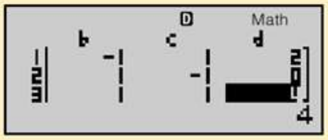
$x - y + z = 2,\ y - z = 0,\ -x + y + z = 4$

[MODE] [5] (EQN) [2] $(a_nX + b_nY + C_nZ = d_n)$

1 [=] [(-)] 1 [=] 1 [=] 2 [=]

1 [=] 1 [=] [(-)] 1 [=] 0 [=]

[(-)] 1 [=] 1 [=] 1 [=] 4 [=]



[=] (X=) = 1

[▼] (Y=) = 2

[▼] (Z=) = 3

نظام المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة

يقال إن نظام المعادلات الخطية متجانسة إذا كان كل عنصر من عناصر مصفوفة الثوابت يساوى صفر

أى إن ب = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، أما إذا كان أحد عناصر مصفوفة الثوابت لا يساوى صفر فإن نظام المعادلات الخطية تسمى معادلات خطية غير متجانسة

تعبير شفهى: بين أي نظام من الأنظمة الآتية يمثل نظام معادلات خطية متجانسة و أيها يمثل نظام معادلات خطية غير متجانسة.

١ ٣س +٢ص-٥ ع =٠ ، ٥س -٣ص+٢ ع =٤ ، س -٢ ع =٠

٢ ٢س +٣ص=٥ ع ، ٣س +ع =٤ص ، س +ع =٠

مرتبة المصفوفة *Rank of a matrix*

تعريف

مرتبة المصفوفة غير الصفرية هى أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوى صفر. فإذا كانت المصفوفة (أ) غير صفرية على النظم م × ن حيث م ≤ ن فإن مرتبة المصفوفة (أ) نرمز لها بالرمز ر (أ) حيث ١ ≤ ر (أ) ≤ ن.

مثال

(٢) أوجد مرتبة كل من المصفوفتين أ $= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 15 \end{pmatrix}$

الحل

أولًا: المصفوفة أ $= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة على نظم ٢ × ٣

لذلك فإن أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينة منها هو ٢

∴ نوجد $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 = -5 \neq$ صفر ∴ ر (أ) = ٢

ثانيًا: المصفوفة ب $= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 15 \end{pmatrix}$ مصفوفة على نظم ٢ × ٣

أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هو ٢

$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 12 & 15 \end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{vmatrix}$ = صفر

∵ قيمة كل من المحددات الصغرى = صفر ∴ ر (أ) < ٢ ∴ ر (أ) = ١

حاول أن تحل

(٢) أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية:

أ $= \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

مثال

(٣) أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية: أ $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

الحل

$|أ| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 25 \neq$ صفر ∴ ر (أ) = ٣

$|ب| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = صفر لأن $ع_3 = ع_1 + ع_2$ ∴ ر (ب) < ٣

نوجد أى محدد من رتبة ٢

$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7 \neq$ صفر ∴ ر (ب) = ٢

حاول أن تحل

(٣) أوجد مرتبة كل من المصفوفة أ $= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ، المصفوفة ب $= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & -2 \\ 6 & 9 & 15 \end{pmatrix}$

لاحظ أن

١- إذا كانت I مصفوفة الوحدة على النظم م × م فإن مرتبة I يساوى م لأن |I| = ١ ≠ صفر

٢- مرتبة المصفوفة الصفرية تساوى صفر

٣- مرتبة المصفوفة أ = مرتبة $أ^{مد}$

٤- إذا أُضيف (أو حُذف) صف (عمود) صفرى على المصفوفة أ فإن رتبتها لا تتغير.

٥- إذا أضيف (أو حذف) صف (عمود) عبارة عن تجميع لعدة صفوف (أعمدة) فإن مرتبة المصفوفة أ لا تتغير.

تفكير ناقد

١- إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٠ & ك \\ -١ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ وكان ر (أ) = ٢ أوجد قيمة ك

٢- اذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & -١ \\ ٢ & ك & ٠ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$ وكانت ر (أ) = ٣ أوجد قيمة ك الحقيقية

المصفوفة الموسعة *Augmented matrix*

إذا كان لدينا م من المعادلات الخطية في ن من المجاهيل، فإنها تكتب على الصورة أس = ب فأنه يمكن تعريف المصفوفة الموسعة* حيث $أ^*$ = (أ | ب) وهي على النظم م × (ن + ١).

مثال

(٤) أوجد المصفوفة الموسعة لكل من الأنظمة الآتية:

أ) ٣س - ٥ص = ٢ ، ٢س + ٧ص = ٩ ، ٤س - ص = ٣

ب) س + ص + ع = ٩ ، ٢س - ٣ص + ٢ع = ٣ ، ٣س + ٢ص - ٣ع = -٣

الحل

أ) $أ^* = \left(\begin{array}{cc|c} ٣ & -٥ & ٢ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٤ & -١ & ٣ \end{array}\right)$

ب) $أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ٩ \\ ٢ & -٣ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٢ & -٣ & -٣ \end{array}\right)$

حاول أن تحل

(٤) أوجد المصفوفة الموسعة لكل من الأنظمة الآتية:

أ) ٢س + ٣ص = ٧ ، ٣س - ص = ٥ ، س - ص = ١

ب) ٣س + ٢ص - ع = ٤ ، س + ص + ع = ٣ ، س - ع = ٠

مثال

(٥) أوجد مرتبة المصفوفة الموسعة للنظام ٢س -ص=٣ ، ٦ س - ٣ص= ٩

الحل

$أ^* = \left(\begin{array}{cc|c} ٢ & ١- & ٣ \\ ٦ & ٣- & ٩ \end{array}\right)$ مصفوفة على نظم ٢ × ٣

∴ أعلى رتبة لمحدد يمكن تكوينه منها هي ٢

$\begin{vmatrix} ٢ & ١- \\ ٦ & ٣- \end{vmatrix}$ = -٦ + ٦ = صفر ، $\begin{vmatrix} ١- & ٣ \\ ٣- & ٩ \end{vmatrix}$ = -٩ + ٩ = صفر ، $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{vmatrix}$ = ١٨ - ١٨ = صفر

∵ قيمة كل من المحددات الصغرى = صفر ∴ ر ($أ^*$) < ٢ ر ($أ^*$) = ١

حاول أن تحل

(٥) أوجد مرتبة مصفوفة الموسعة لكل من الأنظمة

(أ) ٣س + ٢ص= ٤ ، ٢س + ٣ص = -٦ (ب) ٣س - ٥ص= ٢ ، ٩س + ١٥ص = ١٠

إمكانية حل أنظمة المعادلات الخطية

أولًا: المعادلات غير المتجانسة *Non homogeneous equations*

تسمى المعادلة: $أ_١$س$_١$ + $أ_٢$س$_٢$ + ... + $أ_ن$ س$_ن$ = ج معادلة غير متجانسة حيث ج ≠ ٠

وتسمى المجموعة أس = جـ غير متجانسة حيث جـ ≠ □

١- يكون للمجموعة المكونة من ن معادلة غير متجانسة فى ن مجهولًا حل وحيد إذا كانت
ر (أ) = ر($أ^*$) = ن

٢- يكون لمجموعة المعادلات عدد غير محدود من الحلول «عدد لا نهائي» إذا كان
ر (أ) = ر($أ^*$) = ك حيث ك < ن

٣- أما إذا كان ر (أ) ≠ ر($أ^*$) فإن مجموعة المعادلات ليس لها حل على الاطلاق .

المعادلات الخطية فى ثلاث مجاهيل

لنفرض مجموعة المعادلات

$أ_١$ س + $ب_١$ص + $جـ_١$ ع = $ك_١$ $أ_٢$س + $ب_٢$ ص + $جـ_٢$ ع = $ك_٢$

$أ_٣$ س + $ب_٣$ ص + $جـ_٣$ ع = $ك_٣$ **أى أن** أ س = ج

حيث

أ = $\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ك_١ \\ ك_٢ \\ ك_٣ \end{pmatrix}$ ، $أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} أ_١ & ب_١ & جـ_١ & ك_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ & ك_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ & ك_٣ \end{array}\right)$

و يلخص الجدول الآتى إمكانية حل نظام المعادلات السابق و إذا كانت ك١ = ك٢ = ك٣ = ٠ (المعادلات متجانسة فهذا لايؤثر علي مرتبة المصفوفة الموسعة أ*.

ر(أ*)	ر(أ)	إمكانية الحل
٣	٣	يوجد حل وحيد
٣	٢	لايوجد حل على الاطلاق
٣	١	لايوجد حل على الأطلاق
٢	٢	يوجد عدد لانهائى من الحلول
٢	١	لايوجد حل على الاطلاق
١	١	يوجد عدد لانهائى من الحلول

ثانيًا: المعادلات المتجانسة *Homogeneous equations*

تسمى المعادلة: أ١س١ + أ٢س٢ + ... + أن سن = ٠ بالمعادلة الخطية المتجانسة، ومجموعة المعادلات الخطية المتجانسة تكتب بالصورة أ س = □ وتتميز المعادلات الخطية المتجانسة عن المعادلات غير المتجاسة بأنه دائما تكون مرتبة مصفوفة المعاملات أ هى نفسها مرتبة المصفوفة الموسعة أى:

١- إذا كان عدد المجاهيل ن= ر (أ) = ر(أ*) فيكون للنظام حل وحيد وهو س١ = س٢ = س٣ = .. = س ن = صفر ويسمى بالحل الصفرى (البديهى لكونه شديد الوضوح)

٢- إذا كانت مرتبة مصفوفة المعاملات أقل من عدد المجاهيل أى:

ر (أ) < ن (حيث ن عدد المجاهيل)، | أ | = صفر فإنه يوجد للمجموعة عدد لا نهائى من الحلول بخلاف الحل الصفرى»

مثال

(٦) بَيِّن أن للنظام ٣س - ٢ص + ٣ع= ٠ ، س+ص=٠ ، ص - ع = ٠ حلًّا صفريًّا فقط.

الحل

$$أ = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ وهي مصفوفة مربعة على نظم ٣ × ٣

$$\therefore |أ| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$ باستخدام عناصر العمود الأول

∴ |أ| = ٣ (-١ - ٠) -١(٢ - ٣) + صفر (٠- ٣)

|أ| = -٣ + ١ = -٢ ≠ صفر ∴ ر (أ) = ٣ = عدد المجاهيل

∴ النظام له حل وحيد وهو الحل الصفري وهو س=٠، ص=٠، ع=٠ فتكون مجموعة الحل = {(٠، ٠، ٠)}

حاول أن تحل

(٦) بين أن للنظام ٢س + ص - ع=٠ ، س - ع=٠ ، ٢ص + ع = ٠ حلًّا صفريًّا فقط.

مثال

(٧) بين أن للنظام ٣س + ص + ٤ ع=٠ ، ٢س + ٣ص + ٥ ع=٠ ، -س + ٢ص + ع=٠ عددًا لا نهائيًا من الحلول وأوجد صورة هذا الحل.

الحل

نوجد أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ -١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة مربعة على نظم ٣×٣

∴ |أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ -١ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = صفر، حيث $ع_٣ = ع_١ + ع_٢$ ∴ ر (أ) =٢

∵ ر (أ) =٢ (أقل من ٣) عدد المجاهيل

∴ للنظام عدد لا نهائي من الحلول على الصورة (ل، ل ، -ل).

استعن بمدرسك فى كيفية ايجاد صورة الحل العام السابق

حاول أن تحل

(٧) بين أن للنظام ٢س+ ٣ص+ ٥ع = ٠، ٧س + ٤ص -٢ع=٠ ، ٦س + ٩ص + ١٥ع = صفر عددًا لا نهائيًا من الحلول واكتب صورة الحل.

تمارين (٣ – ٣)

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) من بين الأنظمة الخطية الآتية، مجموعة المعادلات المتجانسة هى:

أ ٢س + ص = ٣ ، س + ٢ص = ٢ — ب س - ص = ٠ ، س + ٢ص = ١٢

ج ٣س + ص = ١ ، ٢س + ص = ٠ — د س - ٢ص = ٠ ، ٣س + ص = ٠

(٢) إذا كان $\begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$ فإن $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ تساوى:

أ $\begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$ — ب $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ — ج $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ — د $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

(٣) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٨ & ١٦ \end{pmatrix}$ فإن ر (أ) =

أ صفر — ب ١ — ج ٢ — د ٣

(٤) مرتبة مصفوفة الوحدة $I_٣$

أ ٣ — ب ٢ — ج ١ — د صفر

(٥) مرتبة المصفوفة ☐ من النظم ٣ × ٣

أ صفر — ب ١ — ج ٢ — د ٣

(٦) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢- & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١- \end{pmatrix}$ وكان ر (أ) = ٢ فإن ك =

أ -٢ — ب صفر — ج ٢ — د ٦

(٧) إذا كان م عدد المعادلات الخطية، ن عدد المجاهيل فإن المصفوفة الموسعة تكون على النظم

أ م × ن — ب م × (ن + ١) — ج (م + ١) × ن — د (م + ١) (ن + ١)

(٨) مرتبة المصفوفة الموسعة للنظام: ٢س - ٣ص = ٥ ، ٦س - ٩ص = ١٥ هى

أ صفر — ب ١ — ج ٢ — د ٣

(٩) عدد حلول النظام: ٢س + ٥ص = ٠ ، ٣س - ع = ٠ ، ٢ص - ٣ ع = ٠ هو

أ الحل الصفرى فقط. — ب صفر

ج عدد نهائى من الحلول عدا الحل الصفرى. — د عدد لانهائى من الحلول بينها الحل الصفرى.

(١٠) يوجد للنظام $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٢- & ٣- \\ ٤ & ٢- & ٣- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} =$ ☐

أ الحل البديهى فقط — ب عدد لانهائى من الحلول بينها الحل الصفرى.

ج عدد نهائى من الحلول عدا الحل الصفرى — د لايوجد حل على الإطلاق.

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١١) حل المعادلات المصفوفية الآتية:

(أ) $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{جـ} \\ \text{ء} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ٣ \end{pmatrix}$

(د) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{ب} \\ \text{جـ} \\ \text{ء} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \\ ٧ \end{pmatrix}$ (هـ) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & -١ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ -١ \end{pmatrix}$ (و) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ١ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ \\ ٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$

(١٢) اكتب مصفوفة موسعة لنظام المعادلات الآتى، ثم حل هذا النظام باستخدام طريقة معكوس المصفوفة (إن أمكن)

(أ) ٢س + ص + ع = ٠ ، ٣س + ٢ص + ٣ع = ١٢ ، ٤س + ص + ٢ع = -١

(ب) س + ٣ص + ٢ع = ٠ ، س + ع = -١ ، س + ٢ص = ٣

(جـ) ٢س + ص + ٣ع = ٠ ، س + ص = -١ ، ص + ٢ع = ٣

(د) ٤س + ٣ص - ٥ع = ٦ ، ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ ، س - ص + ع = ٢

(١٣) بيِّن أن للأنظمة الآتية حلًّا صفريًّا فقط:

(أ) ٢س + ٧ص + ٣ع = ٠ ، ٣س + ص - ٢ع = ٠ ، ٤س - ٣ص - ع = ٠

(ب) س - ٢ص + ٢ع = ٠ ، ٣س + ٤ع = ٠ ، ٦ع - ص = ٠

(جـ) س + ٢ص - ع = ٠ ، ٢س + ٣ص - ع = ٠ ، ٣س - ٤ص + ٢ع = ٠

(١٤) بيِّن أن للأنظمة الآتية عددًا لانهائيًّا من الحلول واكتب صورة الحل.

(أ) س + ٢ص + ٣ع = ٠ ، ٢س + ٣ص + ٥ع = ٠ ، ٣س - ص + ٢ع = ٠

(ب) ٢س - ص + ٣ع = ٠ ، ٤س - ٢ص + ٦ع = ٠ ، س + ٢ع = ٠

(جـ) ٣س - ٥ص - ٢ع = ٠ ، ٢س + ص + ٣ع = ٠ ، -س + ٣ص + ٢ع = ٠

ملخص الوحدة

المحدد: المحدد من الرتبة ن يتكون من ن من الصفوف ، ن من الأعمدة وينشأ من حذف (ن - ١) من المتغيرات فى ن من المعادلات الخطية .

خواص المحددات:

- لا تتغير قيمة المحدد إذا تبدلت الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها.
- قيمة المحدد لاتتغير بفكه عن طريق عناصر أى صف (عمود) .
- إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف (عمود) فى محدد فإن هذا العامل يمكن اخذه خارج المحدد.
- قيمة المحدد تساوى صفر فى الحالات الآتية:
  - ✔ إذا كانت جميع عناصر أى صف أو (أى عمود) فى محدد تساوى صفر فإن قيمة المحدد = صفر.
  - ✔ إذا تساوت العناصر المتناظرة فى أى صفين (أو عمودين) فى محدد فإن قيمة المحدد = صفر.
- إذا بدلنا موضعى صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج =-١ × قيمة المحدد الأصلى.
- إذا كتبت جميع عناصر أى صف "عمود" كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلى على صورة مجموع محددين .
- إذا أضفنا لعناصر أى صف "عمود" العناصر المناظرة لها من صف "عمود" آخر مضروبة فى عدد مثل م فإن قيمة المحدد لا تتغير .
- قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس .

لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة من النظم ٣ × ٣ باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة نتبع الخطوات التالية:

- نوجد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة أن | أ | ≠ ٠
- نكوِّن مصفوفة العوامل المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة أ .
- نوجد المصفوفة الملحقة أمل لمصفوفة العوامل المرافقة .
- نوجد المعكوس الضربى للمصفوفة أ من العلاقة: $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \times أ_{مل}$

ملخص الوحدة

حل أنظمة المعادلات الخطية

باعتبار أن : أ هى مصفوفة المعاملات، س هى مصفوفة المتغيرات

ب هى مصفوفة الثوابت . فإن:

- المعادلة المصفوفية تكتب بالصورة : أ س = ب
- وحل هذه المعادلة هو : س = $أ^{-1}$ × ب

مرتبة المصفوفة:

مرتبة المصفوفة غير الصفرية هى أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوى الصفر، فإذا كانت المصفوفة أ غير الصفرية على النظم م × ن حيث م ≤ ن فإن مرتبة المصفوفة (أ) نرمز له بالرمز ر(أ) حيث ١≤ر(أ) ≤ ن .

المصفوفة الموسعة:

هى مصفوفة ممتدة للنظام الخطى و يرمز لها بالرمز $أ^*$ حيث:

$أ^*$ = (أ | ب) وهى على النظم م × (ن + ١).

المعادلات غير المتجانسة

تسمى مجموعة المعادلات التى على صورة معادلة المصفوفة: أ س = ب غير متجانسة حيث ب ≠ ☐

- يكون للمجموعة المكونة من ن معادلة غير متجانسة فى ن مجهولًا حل وحيد إذا كانت ر(أ) = ر($أ^*$) = ن (عدد المجاهيل) حيث | أ | ≠ صفر
- يكون لمجموعة المعادلات عدد غير محدود من الحلول "عدد لا نهائى" إذا كان : ر(أ) = ر($أ^*$) = ك حيث ك < ن .
- ولايكون لها حل على الاطلاق إذا كان ر(أ) ≠ ر($أ^*$)

المعادلات المتجانسة:

تسمى مجموعة المعادلات التى على الصورة معادلة : أ س = ☐ بالمعادلات المتجانسة، فإذا كان:

ر(أ) = ر($أ^*$) = ن (عدد المجاهيل) يكون للنظام حل وحيد هو الحل الصفرى، (و يسمى بالحل البديهى لكونه شديد الوضوح)

ر(أ) < ن (حيث ن عدد المجاهيل) ، | أ | = صفر فإنه يوجد حل للمجموعة غير الحل الصفرى (البديهى).

تمارين عامة

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) $\begin{vmatrix} ٢٤ & ٢٥ & ٢٦ \\ ٢٧ & ٢٨ & ٢٩ \\ ٣٠ & ٣١ & ٣٢ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١٢ (ج) ٢٤ (د) ٥٦

(٢) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٠ \\ ٤ & \text{س} & ٠ \\ \text{س} & ٧ & ٥ \end{vmatrix} =$ صفر هي ....

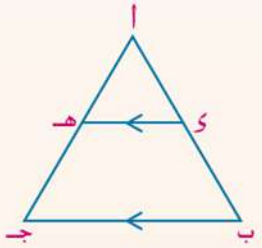
(أ) {٢} (ب) {٥} (ج) {٧} (د) {١٠}

(٣) $\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب} & \text{جـ}+\text{ب} & \text{أ}+\text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{أ} & \text{ب} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) -١ (ب) صفر (ج) أ + ب + جـ (د) أ ب جـ

(٤) في الشكل المقابل $\overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

$\begin{vmatrix} ٥ & ٦ & ٧ \\ \text{دهـ} & \text{أد} & \text{أهـ} \\ \text{ب جـ} & \text{أب} & \text{أجـ} \end{vmatrix} =$ ....



(أ) ٧ (ب) ٦ (ج) ٥ (د) صفر

(٥) قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{س}-١ & ٢ \\ ٤ & \text{س}+١ \end{pmatrix}$ منفردة هي:

(أ) -٣ (ب) ٣ (ج) ±٣ (د) ٩

(٦) جميع المصفوفات الآتية ليس لها معكوس ضربي ما عدا المصفوفة:

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & -٦ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٤ & -٨ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ١٠ & ٥ \end{pmatrix}$

(٧) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} \text{١} & \text{-٢} & \text{-٣} \\ \text{-٢} & \text{٤} & \text{٦} \\ \text{٣} & \text{-٦} & \text{-٩} \end{pmatrix}$ فإن ر(أ) =

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

بدون فك أي من المحددات الآتية أثبت أن:

(٨) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{١} + \text{ب}^{\text{٢}} & \text{ب جـ} \\ \text{جـ} & \text{ب جـ} & \text{١} + \text{جـ}^{\text{٢}} \end{vmatrix} = \text{١}$

(٩) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{ب جـ} & \text{جـ أ + أ ب} \\ \text{١} & \text{جـ أ} & \text{أ ب + ب جـ} \\ \text{١} & \text{أ ب} & \text{ب جـ + جـ أ} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

(١٠) $\begin{vmatrix} \text{س + ص + ٢} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{١} & \text{٢س + ص + ١} & \text{ص} \\ \text{١} & \text{س} & \text{س + ٢ص + ١} \end{vmatrix} = \text{٢}(\text{س + ص + ١})^{\text{٣}}$

(١١) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{س} \\ \text{-٢س + ٢س}^{\text{٢}} & \text{١ + ٢س}^{\text{٢}} & \text{٢س}^{\text{٣}} \\ \text{-٣ + ٢س}^{\text{٢}} & \text{٣س}^{\text{٢}} & \text{١ + ٣س}^{\text{٣}} \end{vmatrix} = \text{١ + ٥ س + س}^{\text{٣}}$

(١٢) $\begin{vmatrix} \text{س + أ} & \text{س + أ} & \text{أ}^{\text{٢}} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{٠} & \text{أ - س} & \text{س - أ} \end{vmatrix} = (\text{س + ٢أ})\,(\text{س - أ})^{\text{٢}}$

(١٣) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{أ} & \text{ب جـ} \\ \text{١} & \text{ب} & \text{جـ أ} \\ \text{١} & \text{جـ} & \text{أ ب} \end{vmatrix} = (\text{أ - ب})\,(\text{ب - جـ})\,(\text{جـ - أ})$

(١٤) إذا كان (س – ١) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} \text{س - ١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{س + ١} \\ \text{-١} & \text{١} & \text{س + ك} \end{vmatrix}$ أوجد قيمة ك

(١٥) أوجد قيمة ك بحيث تكون س عاملًا للمحدد $\begin{vmatrix} \text{س + ١} & \text{٣} & \text{١} \\ \text{ك} & \text{٢} & \text{٣} \\ \text{س} & \text{٢} & \text{١} \end{vmatrix}$

ثالثًا: ابحث إمكانية حل كل من المعادلات الآتية وأوجد الحل إن وُجِدَ:

(١٦) س + ٢ص + ع = ٣ ، ٤س − ص − ع = ٦ ، س + ص + ٣ع = ١٠

(١٧) س + ص + ع = ١ ، ٢س − ص + ٣ع = −٥ ، ٣س + ٢ص + ٣ع = صفر

(١٨) س + ٢ص − ٣ع = ٠ ، ع − س − ٢ص = ٠ ، ٢س + ٤ص − ٦ع = ٠

(١٩) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ١ & -١ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$

(٢٠) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٣ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٦ \\ ٣ \end{pmatrix}$

(٢١) $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ & -٦ \\ -١ & ٢ & ٣ \\ -٣ & ٦ & ٩ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ -١ \end{pmatrix}$

لمزيد من الأنشطه والتدريبات زيارة الموقع الالكترونى www.sec3mathematics.com.eg

اختبار تراكمى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان $\begin{vmatrix} ا & ب & جـ \\ ى & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix}$ = ٢ فإن $\begin{vmatrix} ٥ا & ب & جـ \\ ٥ى & هـ & و \\ ٣٥س & ٧ص & ٧ع \end{vmatrix}$ =

أ) ٧٠٠   ب) ١٠   جـ) ٣٥   د) ٧٠

(٢) إذا كان ا = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٤ & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ وكان ا × ج = ب فإن ج =

أ) $\begin{pmatrix} -٨ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} -١١ & ٤ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ جـ) $\begin{pmatrix} -١٧ & ٤ \\ ٦ & -١ \end{pmatrix}$ د) $\begin{pmatrix} -٩ & ٦ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$

(٣) تكون المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ا \\ ا & ٨ \end{pmatrix}$ منفردة إذا كانت ا =

أ) -٤   ب) ٤   جـ) ±٤   د) ١٦

(٤) إذا كان $ا^{-١}$ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ وكان ا $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ فإن ص =

أ) ٥   ب) ٦   جـ) ٧   د) ٨

(٥) $\begin{vmatrix} ا+ب & ٥ & جـ \\ ب+جـ & ٥ & ا \\ ا+جـ & ٥ & ب \end{vmatrix}$ = ...

أ) ٥   ب) ٤   جـ) ٣   د) صفر

(٦) إذا كان للمعادلات س + ٢ص + ٣ع = ٥، ٢س - ٣ص + ك ع = ١٣   ٣س + ك ص + ٢ع = ٣ حل وحيد فإن ك ∈

أ) ح   ب) ح - {-١}   جـ) ح - {١٣}   د) ح - {-١، ١٣}

(٧) إذا كان ا = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ -٢ & -٣ & ١ \\ ٦ & ٩ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن ر(ا) =

أ) صفر   ب) ١   جـ) ٢   د) ٣

(٨) إذا كان ا = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$ فإن ر($ا^{مد}$) =

أ) صفر   ب) ١   جـ) ٢   د) ٣

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٩) بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} ٣س & ٣س & ٣س \\ ا & ب & ١ \\ ب+١ & ا+١ & ا+ب \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(١٠) احسب مرتبة المصفوفة ا = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ -٥ & ٤ & -١ \\ -١ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

(١١) بدون فك المحدد

أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١+ص \\ ١ & ١+ص & ١ \end{vmatrix} = ص^{٢}$

(١٢) باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفات حل المعادلات الآتية:

٢س + ٢ص - ع = ٣، ٣س + ص = ٥، س + ص + ٢ع = ٩

(١٣) باستخدام خواص المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} س & س & ا+س \\ س & ب+س & س \\ جـ+س & س & س \end{vmatrix} = \text{اب جـ + س (اب + ب جـ + ا جـ)}$$

(١٤) ابحث إمكانية حل المعادلات الآتية:

س - ص + ع = ٢ ، ٢س + ٣ص - ع = ٥، ٣س - ٥ص + ٢ع = -١

(١٥) إذا كان $\begin{vmatrix} ع+٢ & ص & س \\ ع & ص+٢ & س \\ ع & ص & س+٢ \end{vmatrix} = -٤$ أوجد قيمة س + ص + ع

(١٦) بَيِّن أيًّا من المصفوفات الآتية منفردة وأيها غير منفردة:

أ) ا = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix}$

ب) ب = $\begin{pmatrix} ١٦ & ٨ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

ج) ج = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ -١ & ١ & ٠ \\ -٤ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

د) د = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٢ \\ ٦ & ٣ & ٣ \end{pmatrix}$

ثانياً: الهندسة الفراغية

الوحدة الأولى

الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

Geometry Measurement in two and three dimensions

مقدمة الوحدة

الهندسة هى علم دراسة مختلف أنواع الأشكال وصفاتها، كما أنها دراسة علاقة الأشكال والزوايا والمسافات ببعضها وتنقسم إلى جزأين: **الهندسة المستوية**: وتختص بدراسة الأشكال الهندسية التى لها بعدين فقط، **الهندسة الفراغية (الفضاء)**: وتختص بدراسة المجسمات التى لها ثلاثة أبعاد (طول، عرض، أرتفاع) وتتعامل مع فراغات مثل متوازى المستطيلات، والمجسمات الأسطوانية، والأجسام المخروطية والكروية.

وأول من استخدم الهندسة هم الأغريق واكتشف طاليس اثباتات لبعض النظريات ثم جمع أقليدس بعد ذلك كل النتائج الهندسية ونظمها فى كتاب أطلق عليه "المبادئ" ثم تطورت بعد ذلك إلى الهندسة التحليلية وهندسة المثلثات وهندسة منكوفسكى (ذات الأربعة أبعاد) والهندسة اللا إقليدية، وغيرها وفى هذه الوحدة سوف نتناول استخدام المتجهات فى دراسة المستقيمات والمستويات والعلاقة بينهما فى ثلاثة أبعاد.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذه الوحدة، وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف النظام الإحداثى ذى الثلاثة أبعاد ويحلل المتجه فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطتين فى الفراغ وإحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة فى الفراغ.
- يوجد المعادلة الكارتزية للكرة بدلالة إحداثيات المركز وإحداثيات نقطة على الكرة.
- يتعرف على المتجهات فى الفراغ من خلال:
  - تمثيل المتجه بثلاثى مرتب.
  - متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ $\overleftarrow{\text{س}}$ = (١، ٠، ٠)، $\overleftarrow{\text{ص}}$ = (٠، ١، ٠)، $\overleftarrow{\text{ع}}$ = (٠، ٠، ١).
  - التعبير عن أى متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$
  - التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهه فى الفراغ بدالة أحداثيات طرفيها.
- يتعرف حاصل الضرب القياسى وحاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين فى المستوى والفراغ.
- يتعرف خواص حاصل الضرب القياسى والاتجاهى لمتجهين فى المستوى والفراغ.
- يتعرف الزاوية بين متجهين فى الفراغ.
- يتعرف تعامد متجهين فالفراغ.
- يحدد زوايا الاتجاه وجيوب تماماالاتجاه لمتجه فى الفراغ.
- يستخدم حاصل الضرب القياسى لايجاد المركبة الجبرية والاتجاهية لمتجه فى اتجاه متجه آخر
- يستخدم الضرب القياسى لايجاد الشغل المبذول.
- يتعرف المعنى الهندسى لمعيار الضرب الاتجاهى.
- يتعرف حاصل ضرب الثلاثى القياسى والمعنى الهندسى له.

مصطلحات أساسية

فراغ	space	مستوى	plane	الضرب الثلاثى القياسى	scalar triple product
ثلاثى الأبعاد	3D	ضرب قياسي	scalar product		
مسقط	projection	ضرب اتجاهي	vector product	متجه الوضع	position vector
قاعدة اليد اليمنى	right hand Rule	مركبة المتجه	component	متجه الوحدة	unit vector
متجه ثلاثى الرتب	3D−vector	الشغل	work	معيار المتجه	the norm of vector

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد.

الدرس (١ - ٢): المتجهات فى الفراغ.

الدرس (١ - ٣): ضرب المتجهات.

مخطط تنظيمى للوحدة

الوحدة الأولى

١ - ١ النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

The three- dimensional orthogonal coordinate system

سوف تتعلم

- تحديد موقع نقطة فى النظام الإحداثى ثلاثي الأبعاد.
- تعيين إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين فى الفراغ.
- إيجاد البعد بين نقطتين فى الفراغ.
- معادلة الكرة فى الفراغ.

مصطلحات أساسية

- فراغ *space*
- ثلاثي الأبعاد *3d*
- مسقط *projection*
- قاعدة اليد اليمنى *right hand rule*
- مستوى *plane*

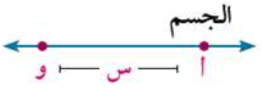
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*

فكر وناقش

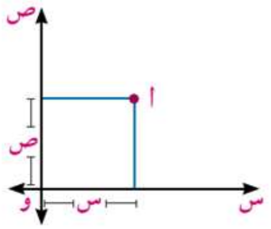
- لتحديد موضع جسم على خط مستقيم يلزم معرفة بُعد هذا الجسم عن نقطة ثابتة (اختيارية) عليه، وتسمى نقطة الأصل (و).

وا = س ∈ ح



- لتحديد موضع جسم فى مستوى يلزم معرفة مسقط هذا الجسم على كل من محوري إحداثيات متعامدة.

أ = (س، ص) ∈ ح^{٢}



- كيف يمكنك تحديد موضع جسم فى الفراغ؟

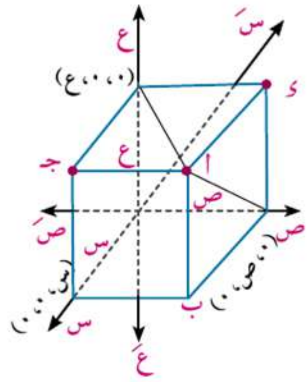
تعلم

النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد (ح^{٣})

the three- dimensional orthogonal)

coordinate system (R^3

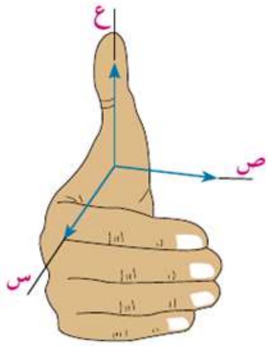
تتعين إحداثيات النقطة أ فى الفراغ بالنسبة إلى ثلاثة محاور متقاطعة فى نقطة واحدة ومتعامدة مثنى مثنى، وذلك بإيجاد مسقط هذه النقطة على كل محور.



فكر: فى النظام ثلاثى الأبعاد الإحداثى السابق، أوجد إحداثيات كل من النقط ب، جـ، ء

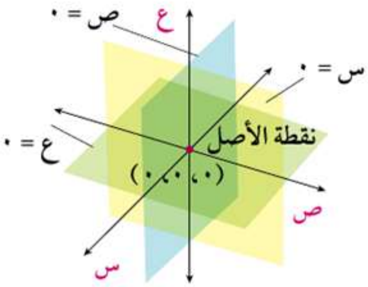
مفاهيم أساسية:

١- قاعدة اليد اليمنى



عند تكوين النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد يجب اتباع قاعدة اليد اليمنى؛ حيث تشير أصابع اليد المنحنية من الاتجاه الموجب لمحور س إلى الاتجاه الموجب لمحور ص، ويشير اتجاه الإبهام إلى الاتجاه الموجب لمحور ع.

٢- مستويات الإحداثيات



- جميع النقط فى الفراغ التي إحداثياتها (س، ص، ٠) تقع فى المستوى الإحداثى س ص وتكون معادلته **ع = صفر**
- جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (س، ٠، ع) تقع فى المستوى الإحداثى س ع وتكون معادلته **ص = صفر**
- جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (٠، ص، ع) تقع فى المستوى الإحداثى ص ع وتكون معادلته **س = صفر**

مثال

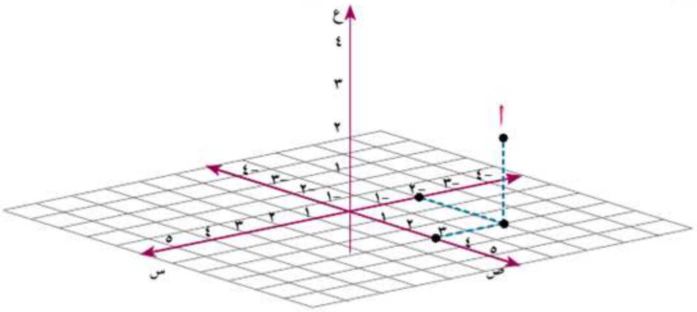
(تعيين موضع نقطة فى الفراغ)

(١) عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثي متعامد ثلاثي الأبعاد:

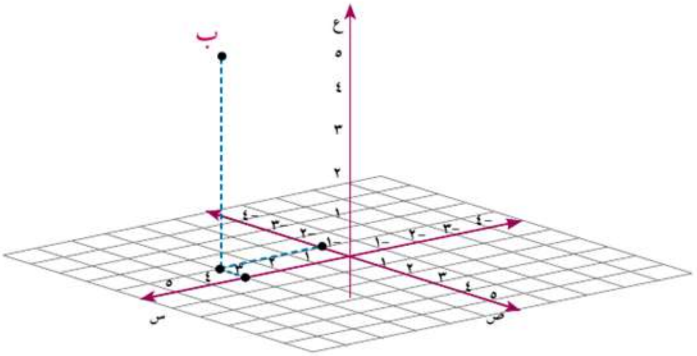
(أ) أ (-٢، ٣، ٢)   (ب) ب (٣، -١، ٥)   (جـ) جـ (٤، ٠، -١)

الحل

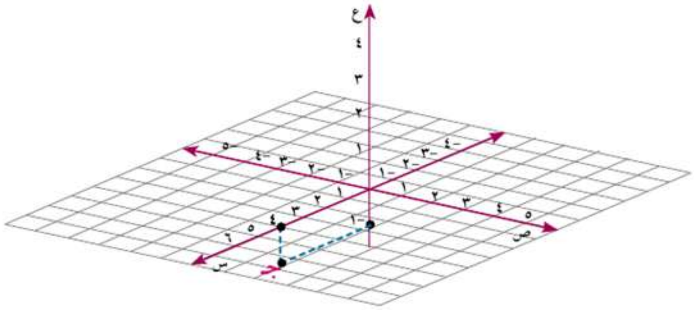
(أ) لتعيين النقطة أ (-٢، ٣، ٢) نحدد النقطة (-٢، ٣) فى المستوى س ص، ثم نتحرك فى الاتجاه الموجب لمحور ع وحدتين، فنحصل على النقطة أ (-٢، ٣، ٢)



(ب) لتعيين النقطة ب (٣، -١، ٥) نحدد النقطة (٣، -١) فى المستوى س ص، ثم نتحرك فى الاتجاه الموجب لمحور ع ٥ وحدات، فتحصل على النقطة ب.



ج لتعيين إحداثيات النقطة جـ (٤، ٠، -١) نحدد النقطة (٤، ٠) على محور س، ثم نتحرك فى الاتجاه السالب لمحور ع وحدة واحدة.



حاول أن تحل

(١) أ عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثي متعامد ثلاثي الأبعاد:

ا (٣، ٢، ٣) ب (-١، ٤، ٣) جـ (٠، ٠، ٤)

ب أكمل:

١- بُعد النقطة ا (-١، ٢، ٣) عن المستوى الإحداثى س ص = ... وحدة طول.

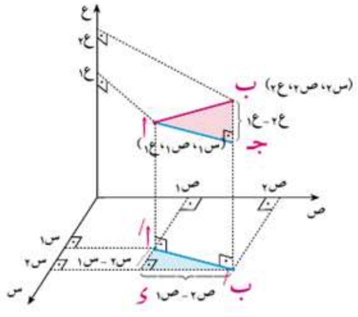
٢- بُعد النقطة ب (٤، -٢، ١) عن المستوى الإحداثى ص ع = ... وحدة طول.

تعلم

تعلم: البعد بين نقطتين فى الفراغ *the distance between two point in space*

إذا كانت ا (س١، ص١، ع١)، ب (س٢، ص٢، ع٢) نقطتين فى الفراغ، فإن البُعد بين النقطتين ا، ب يعطى بالعلاقة

$$ا ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$$



مثال

(٢) أثبت أن المثلث ا ب جـ حيث ا (٢، -١، ٣) ، ب(-٤، ٤ ، ٢) ، جـ (-٢، ٥، ١) قائم الزاوية فى جـ.

الحل

$ا ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$ قانون البعد بين نقطتين

$= \sqrt{(٢ + ٤)^٢ + (-١ - ٤)^٢ + (٣ - ٢)^٢} = \sqrt{٦٢}$

$ب جـ = \sqrt{(-٤ + ٢)^٢ + (٤ - ٥)^٢ + (٢ - ١)^٢} = \sqrt{٦}$

$ا جـ = \sqrt{(٢ + ٢)^٢ + (-١ - ٥)^٢ + (٣ - ١)^٢} = \sqrt{٥٦}$

∵ $(أب)^٢ = (\sqrt{٦٢})^٢ = ٦٢$، $(ب جـ)^٢ + (أ جـ)^٢ = (\sqrt{٦})^٢ + (\sqrt{٥٦})^٢ = ٦ + ٥٦ = ٦٢$

∴ $(أب)^٢ = (ب جـ)^٢ + (أ جـ)^٢$　　　∴ ق($\hat{جـ}$) = ٩٠°

حاول أن تحل

(٢) أثبت أن النقط أ(٤، ٤، ٠)، ب(٤، ٠، ٤)، جـ(٠، ٤، ٤) هى رؤوس لمثلث متساوى الأضلاع، وأوجد مساحته.

تعلم

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة　*The coordinates of midpoint of a line segment*

إذا كانت أ($س_١$، $ص_١$، $ع_١$)، ب($س_٢$، $ص_٢$، $ع_٢$) نقطتان فى الفراغ، فإن إحداثيات نقطة جـ التى تقع منتصف $\overline{أب}$ هى:

$$جـ\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}،\ \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}،\ \frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)$$

مثال

(٣) إذا كانت أ(١، -٣، ٢)، ب (٤، -١، ٤)، أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$

الحل

إحداثيات نقطة المنتصف $= \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}،\ \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}،\ \frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)$

$= \left(\frac{١ + ٤}{٢}،\ \frac{-٣ - ١}{٢}،\ \frac{٢ + ٤}{٢}\right)$

$= \left(\frac{٥}{٢}،\ -٢،\ ٣\right)$

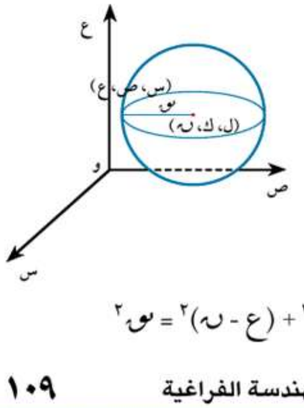
حاول أن تحل

(٣) أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{جـ ء}$ حيث جـ (٠، ٤، -٢)، ء(-٦، ٣، ٤)

تفكير ناقد: إذا كانت جـ (٢، ٢، ٦) هى نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (١، -٤، ٠) أوجد إحداثيات نقطة ب

تعلم

معادلة الكرة فى الفراغ　*equation of sphere*



تُعَّرف الكرة بأنها مجموعة نقط الفراغ التي تبعد عن نقطة ثابتة (تعرف بمركز الكرة) بُعدًا ثابتًا (يسمى بطول نصف قطر الكرة).

فإذا كانت النقطة (س، ص، ع) تقع على الكرة التي مركزها النقطة (ل، ك، ن) وطول نصف قطرها نق فإنه طبقًا لقانون البعد بين نقطتين يكون $\sqrt{(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢} =$ نق

وبتربيع الطرفين نحصل على الصورة القياسية لمعادلة الكرة $(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢ =$ نق^٢

ملاحظة: المعادلة العامة للكرة هي :

$س^2 + ص^2 + ع^2 + 2 ل س + 2 ك ص + 2 ن ع + ء = 0$ وهي تمثل معادلة كرة مركزها (-ل، -ك ، -ن)

وطول نصف قطرها = $\sqrt{ل^2 + ك^2 + ن^2 - ء}$ حيث $ل^2 + ك^2 + ن^2 > ء$

مثال

(٤) أوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة التي مركزها النقطة (٢، -١، ٤) وطول نصف قطرها ٣ وحدات.

الحل

معادلة الكرة $(س - 2)^2 + (ص + 1)^2 + (ع - 4)^2 = 9$

حاول أن تحل

(٤) أوجد معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات.

مثال

(٥) أوجد معادلة الكرة التي أ(-١، ٥ ،٤) ، ب(٥، ١، -٢) هما طرفي قطر فيها.

الحل

مركز الكرة هو نقطة منتصف $\overline{اب}$ أي $(\frac{-1+5}{2} ، \frac{5+1}{2} ، \frac{4-2}{2}) = (2، 3، 1)$

طول نصف قطر الكرة يساوي البعد بين المركز ونقطة أ

$\therefore نق = \sqrt{(2+1)^2 + (3-5)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{22}$

$\therefore$ معادلة الكرة هي: $(س - 2)^2 + (ص - 3)^2 + (ع - 1)^2 = 22$

حاول أن تحل

(٥) أوجد معادلة الكرة التي $\overline{اب}$ قطر فيها حيث أ (-١، ٤ ، ٢)، ب (٣، -٢، ٦)

مثال

(٦) عَيِّن مركز وطول نصف قطر الكرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 + ع^2 + 4س - 2ص - 6ع + 11 = 0$

الحل

احداثيات مركزة الكرة = ($-\frac{1}{2}$ معامل س، $-\frac{1}{2}$ معامل ص، $\frac{1}{2}$ معامل ع) = (-٢، ١، ٣)

$\therefore نق = \sqrt{ل^2 + ك^2 + ن^2 - ء} = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (3)^2 - 11} = \sqrt{3}$ وحدة طول

حاول أن تحل

(٦) عين مركز وطول نصف قطر الكرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 + ع^2 + 6س - 8ص + 4ع + 1 = 0$

تمارين (١ - ١)

أكمل ما يأتي:

(١) إذا كانت النقطة (س، ص، ع) تقع في المستوى الإحداثي س ص فإن ع = ...

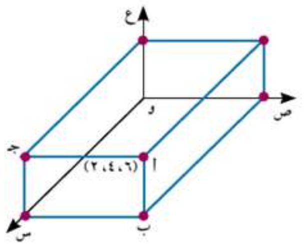
(٢) المستقيمان $\overleftrightarrow{س س'}$ ، $\overleftrightarrow{ع ع'}$ يكونان المستوى الإحداثي .... الذي معادلته ....

(٣) الشكل المقابل يمثل متوازي مستطيلات في نظام إحداثي متعامد.

أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل و (٠، ٠، ٠)

فإن إحداثيات النقطة ب هي ....

و إحداثيات النقطة جـ هي ....



(٤) إذا كانت أ (١، -١، ٤) ، ب (٠، -٣، ٢) فإن إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أ ب}$ هي ....

(٥) معادلة الكرة التي مركزها النقطة (٢، -١، ٤) وطول نصف قطرها ٥ وحدات هي ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٦) بُعد النقطة (٣، -١، ٢) عن المستوى الإحداثي س ع يساوي .... وحدة طول

أ ٣ ب -١ ج ٢ د ١

(٧) طول العمود المرسوم من النقطة (-٢، ٣، ٤) على محور س يساوي .... وحدة طول.

أ ٢ ب ٣ ج ٥ د ٤

(٨) إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها (-٣، ٢، ٤)، (٥، ١، ٨) هي

أ (١، $\frac{٣}{٢}$، ٦) ب (٢، -١، ٤) ج (٨، -١، ٤) د (١، -$\frac{٣}{٢}$، ٢)

(٩) معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات هي

أ س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٥ ب س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٠

ج (س - ٥)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} + (ع - ٥)^{٢} = ٢٥ د س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٢٥

(١٠) معادلة الكرة التي مركزها النقطة (٢، -٣، ٤) وتمس المستوى الإحداثي س ص هي

أ (س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع - ٤)^{٢} = ٤ ب (س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع - ٤)^{٢} = ٩

ج (س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع - ٤)^{٢} = ١٦ د (س + ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} + (ع + ٤)^{٢} = ١٦

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١١) أوجد البعد بين النقطتين أ ، ب فى كل مما يأتي:

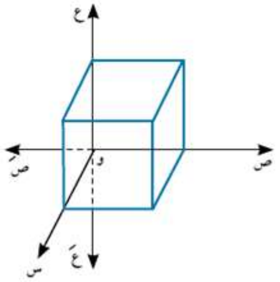
أ) أ (٧ ، ٠، ٤) ، ب (١ ، ٠ ، ٠)   ب) أ (٤، ١، ٩) ، ب (٢ ، ١ ، ٦)

جـ) أ (١ ، ١ ، -٧) ، ب (-٢ ، -٣ ، -٧)

(١٢) أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط الآتية هو مثلث قائم الزاوية، وأوجد مساحته:

أ) (-٢ ، ٥ ، ٢)، (٠ ، ٠ ، ٢)، (٠ ، ٤ ، ٠)   ب) (-٤ ، ٤ ، ١)، (٢ ، -١ ، ٢)، (-٢ ، ٥ ، ٠)

(١٣) الشكل المقابل يمثل مكعبًا حجمه ٢٧ وحدة مكعبة أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل أوجد إحداثيات باقي الرؤوس.



(١٤) أثبت أن النقط (٧، ١، ٣) ، (٥، ٣، ك)، (٣، ٥، ٣) تكون مثلثًا متساوى الساقين لجميع قيم ك الحقيقية، ثم أوجد قيمة (قيم) ك التي تجعل المثلث متساوي الأضلاع.

(١٥) أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ فى كل مما يأتي:

أ) أ(٣، -١، ٤) ، ب (٢، ٠، -١)   ب) أ(-٣، ٥، ٥) ، ب (-٦، ٤، ٨)

(١٦) إذا كانت جـ (-١، ٤، ٠) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث ب (٤، -٢، ١) أوجد إحداثيات النقطة أ.

(١٧) أوجد معادلة الكرة إذا كان:

أ) مركزها النقطة (٣، -١، ٢) وطول نصف قطرها $\sqrt{٧}$

ب) (٣، ٤، -٣)، (٠، ٢، ١) نهائيًا قطر فيها.

جـ) مركزها النقطة (١، -٦، ١) وتمر بالنقطة (٢، -١، ٥)

(١٨) أوجد مركز وطول نصف قطر الكرة فى كل مما يأتى:

أ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٩$

ب) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٢س + ٤ص = ٠$

جـ) $٢س^٢ + ٢ص^٢ + ٢ع^٢ - ٢س - ٦ص - ٤ع + ٥ = ٠$

(١٩) أوجد معادلة الكرة التي طول نصف قطرها ٣ وحدات، وتمس مستويات الإحداثيات الموجبة.

(٢٠) **تفكير إبداعي:**
إذا كانت أ ∋ محور س، ب ∋ محور ص، جـ ∋ محور ع وكانت النقطة (١، -١، صفر) منتصف $\overline{\text{أب}}$، والنقطة (٠، -١، ٢) منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$. أوجد إحداثيات منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

(٢١) **تفكير إبداعي:** إذا قطع محور السينات الكرة (س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ١٤ في النقطتين أ، ب، أوجد طول $\overline{\text{أب}}$

(٢٢) **الكتابة في الرياضيات:** إذا كانت جميع النقط في الفراغ التي على الصورة (س، ص، ٠) تقع في المستوى الديكارتي س ص ومعادلته ع = ٠، فأوجد معادلة المستوى الذي تقع فيه جميع النقط في الفراغ الذي على الصورة (س، ص، ٢)

(٢٣) **اكتشف الخطأ:** إذا كانت النقطة ب (-١، ٤، ٢) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أجـ}}$ حيث أ(١ ، ٠ ، ٢) أوجد إحداثيات النقطة جـ

حل أشرف	حل زياد
جـ = $\left(\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}\right)، \left(\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)، \left(\frac{ع_١ ع_٢}{٢}\right)\right)$	نفرض جـ (س، ص، ع)
= $\left(\left(\frac{-١ + ١}{٢}\right)، \left(\frac{٤ + ٠}{٢}\right)، \left(\frac{٢ + ٢}{٢}\right)\right)$	∴ $\frac{١ + س}{٢} = -١$ ⟵ س = -٣
= (٠، ٢، ٢)	$\frac{٠ + ص}{٢} = ٤$ ⟵ ص = ٨
	$\frac{٢ + ع}{٢} = ٢$ ⟵ ع = ٢
	∴ جـ (-٣، ٨، ٢)

أي الحلين صوابًا؟ ولماذا؟

١ - ٢ المتجهات فى الفراغ

Vectors in space

سوف تتعلم

- تمثيل المتجه بثلاث رتب.
- متجه الموضع فى الفراغ.
- متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ.
- التعبير عن متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.
- التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها.
- تساوي متجهين فى الفراغ.
- معيار المتجه فى الفراغ.
- متجه الوحدة فى اتجاه متجه فى الفراغ.
- جمع المتجهات فى الفراغ.
- ضرب المتجهات فى عدد حقيقي.

مصطلحات أساسية

- متجه الوضع فى الفراغ *Position vector in space*
- معيار المتجه *the norm vector*
- متجه الوحدة *Unit vector*
- الضرب القياسى *Scalar product*
- الضرب الاتجاهى *Vector product*

مقدمة:

درست سابقًا الكميات القياسية والكميات المتجهة، وعلمت أن المتجه يُمثَّل بقطعة مستقيمة موجهة تحدد بمقدار (معيار المتجه)، واتجاه، وفي هذا الدرس نتناول المتجهات فى الفراغ، وهو (نظام إحداثي ذو ثلاثة أبعاد).

تعلم

متجه الموضع فى الفراغ — *position vector in space*

يعرف متجه الموضع للنقطة أ ($\text{أ}_{\text{س}}$، $\text{أ}_{\text{ص}}$، $\text{أ}_{\text{ع}}$) بالنسبة لنقطة الأصل و (٠، ٠، ٠) على أنه القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة أ.

- ويرمز لمتجه موضع النقطة أ بالرمز $\overrightarrow{\text{أ}}$ أي أن $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}، \text{أ}_{\text{ص}}، \text{أ}_{\text{ع}})$
- $\text{أ}_{\text{س}}$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه محور س.
- $\text{أ}_{\text{ص}}$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه محور ص.
- $\text{أ}_{\text{ع}}$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه محور ع.

معيار المتجه — *the norm of vector*

هو طول القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثل المتجه.

فإذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}، \text{أ}_{\text{ص}}، \text{أ}_{\text{ع}})$ فإن من قانون البعد بين نقطتين يكون

$$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(\text{أ}_{\text{س}})^{2} + (\text{أ}_{\text{ص}})^{2} + (\text{أ}_{\text{ع}})^{2}}$$

مثال

(١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (٢، -١، ٣)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٠، ٤، -٣)$ فإن

- مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه محور س هى ٢
- مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ فى اتجاه محور ع هى -٣

$$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{٢^{2} + (-١)^{2} + (٣)^{2}} = \sqrt{١٤}$$

$$\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{(٠)^{2} + (٤)^{2} + (-٣)^{2}} = ٥$$

المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ يقع فى المستوى الإحداثى ص ع (تنعدم مركبة $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه محور س

حاول أن تحل

(١) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-١، ٤، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣، ١، ٠) أوجد

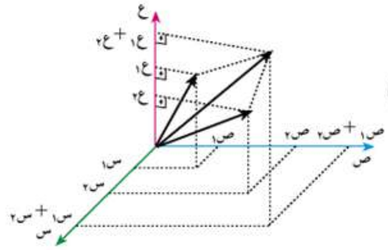
(أ) $أ_س + ب_ص$ (ب) $\|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$

جمع المتجهات فى الفراغ

Adding 3 D vectors

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$، $أ_ص$، $أ_ع$)، $\overrightarrow{ب}$ = ($ب_س$، $ب_ص$، $ب_ع$) فإن:

$\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ = ($أ_س + ب_س$، $أ_ص + ب_ص$، $أ_ع + ب_ع$) = ($جـ_س$، $جـ_ص$، $جـ_ع$)



مثال

(٢) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-٢، ٣، ١)، $\overrightarrow{ب}$ = (٠، -٢، ٤)، فإن:

$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ = (-٢، ٣، ١) + (٠، -٢، ٤) = (-٢+٠، ٣+ (-٢)، ١+ ٤) = (-٢، ١، ٥)

حاول أن تحل

(٢) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٤، -٤، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-١، ٥، ٢) أوجد $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$

خواص عملية جمع المتجهات فى الفراغ

لأي متجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ∈ $ح^٣$ فإن:

١- **خاصية الانغلاق:** $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ ∈ $ح^٣$

٢- **خاصية الإبدال:** $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ}$

٣- **خاصية التجميع:** $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) + \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} + (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ})$

٤- **العنصر المحايد الجمعي المتجه الصفري:** $\overrightarrow{و}$ = (٠، ٠، ٠) هو العنصر المحايد الجمعي فى $ح^٣$
أي أن: $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} = \overrightarrow{و} + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ}$

٥- **المعكوس الجمعي:** لكل متجه $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$، $أ_ص$، $أ_ع$) ∈ $ح^٣$ يوجد
$-\overrightarrow{أ}$ = ($-أ_س$، $-أ_ص$، $-أ_ع$) ∈ $ح^٣$ بحيث: $\overrightarrow{أ} + (-\overrightarrow{أ}) = (-\overrightarrow{أ}) + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$

ضرب المتجه فى عدد حقيقى

Multiplying avector by ascalar

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$، $أ_ص$، $أ_ع$) ∈ $ح^٣$ وكان ك ∈ ح فإن:

ك $\overrightarrow{أ}$ = ك ($أ_س$، $أ_ص$، $أ_ع$) = (ك $أ_س$، ك$أ_ص$، ك$أ_ع$) ∈ $ح^٣$

فمثلًا: ٣ (٢، -١، ٤) = (٦، -٣، ١٢)

$\frac{1}{2}$ (٤، ٩، ٦) = (٢، $\frac{9}{2}$، ٣)

-٢ (١، -٣، -٤) = (-٢، ٦، ٨)

خواص ضرب المتجهات فى عدد حقيقى

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ∈ $ح^3$ وكان ك، ل ∈ ح فإن

١- خاصية التوزيع

- ك ($\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$) = ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ك $\overrightarrow{\text{ب}}$
- (ك + ل) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ل $\overrightarrow{\text{أ}}$

٢- خاصية الدمج

- ك (ل $\overrightarrow{\text{أ}}$) = ل (ك $\overrightarrow{\text{أ}}$) = (ك ل) $\overrightarrow{\text{أ}}$

مثال

(٣) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-١، ٥، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤، -١، ٣) فإن

١- ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢(-١، ٥، ٢) - ٣ (٤، -١، ٣)

= (-٢، ١٠، ٤) + (-١٢، ٣، -٩)

= (-١٤، ١٣، -٥)

٢- أوجد المتجه $\overrightarrow{\text{جـ}}$ حيث ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$

∵ ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$ بإضافة -٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ للطرافين

∴ ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$

∴ ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ٢ (٤، -١، ٣) - ٣ (-١، ٥، ٢)

= (٨، -٢، ٦) + (٣، -١٥، -٦)

= (١١، -١٧، ٠) بالضرب فى $\frac{1}{2}$

∴ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = $\frac{1}{2}$ (١١، -١٧، ٠) = ($\frac{11}{2}$ ، $\frac{-17}{2}$ ، ٠)

حاول أن تحل

(٣) إذا كان $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٢، -٣، ١)، $\overrightarrow{\text{ء}}$ = (٠، ٢، -٢)

أ) أوجد ٥ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ء}}$

ب) إذا كان ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ - ٤ $\overrightarrow{\text{ء}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ}}$ فأوجد $\overrightarrow{\text{أ}}$

تساوى المتجهات فى الفراغ

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$، $\overrightarrow{ب} = (ب_{س} ، ب_{ص} ، ب_{ع})$ فإن:

$\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ **إذا و فقط إذا كان:** $أ_{س} = ب_{س}$ ، $أ_{ص} = ب_{ص}$ ، $أ_{ع} = ب_{ع}$

مثال

(٤) أوجد قيمة ل ، م، ن التى تجعل المتجهين $\overrightarrow{أ} = (ل - ٤ ، م^{٢} - ٣ ، ١)$، $\overrightarrow{ب} = (٥ ، ١ ، ن^{٢})$ متساويين

الحل

$\because \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

$\therefore أ_{س} = ب_{س} \longleftarrow ل - ٤ = ٥ \longleftarrow ل = ٩$

$أ_{ص} = ب_{ص} \longleftarrow م^{٢} - ٣ = ١ \longleftarrow م^{٢} = ٤ \longleftarrow م = \pm ٢$

$أ_{ع} = ب_{ع} \longleftarrow ن^{٢} = ١ \longleftarrow ن = \pm ١$

حاول أن تحل

(٤) إذا كان $(٢س + ١ ، ٥ ، ك + ٤) = (-١ ، ص^{٢} - ٤ ، س + ١)$ فما قيمة س، ص، ك؟

متجه الوحدة

يعرف متجه الوحدة بأنه المتجه الذى معياره يساوى وحدة الأطوال

فمثلًا:

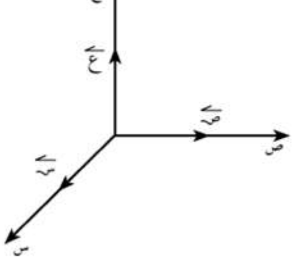
$\overrightarrow{أ} = (\frac{-٣}{١٣} ، \frac{٤}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣})$ **متجه وحدة لأن:** $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{(\frac{-٣}{١٣})^{٢} + (\frac{٤}{١٣})^{٢} + (\frac{١٢}{١٣})^{٢}} = ١$

حاول أن تحل

(٥) بين أى المتجهات الآتية يمثل متجه وحدة

$\overrightarrow{أ} = (\frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٣})$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{ب} = (\frac{١}{٥} ، \frac{٤}{٥} ، \frac{-\sqrt{١٠}}{٥})$

متجهات الوحدة الأساسية ($\overrightarrow{س} ، \overrightarrow{ص} ، \overrightarrow{ع}$)



هى قطع مستقيمة موجهة بدايتها نقطة الأصل، ومعيارها وحدة الأطوال واتجاهها هو الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات س، ص، ع على الترتيب **أى إن:**

$\overrightarrow{س} = (١ ، ٠ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ص} = (٠ ، ١ ، ٠)$، $\overrightarrow{ع} = (٠ ، ٠ ، ١)$

تفكير ناقد

عبر عن المتجهات (-١، ٠، ٠) ، (٠، -١، ٠)، (٠، ٠، -١) بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

التعبير عن متجه فى الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_\text{س}، \text{أ}_\text{ص}، \text{أ}_\text{ع}) \in \text{ح}^٣$ فإن المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ يمكن كتابته على الصورة

$$\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_\text{س}، ٠، ٠) + (٠، \text{أ}_\text{ص}، ٠) + (٠، ٠، \text{أ}_\text{ع})$$
$$= \text{أ}_\text{س}(١، ٠، ٠) + \text{أ}_\text{ص}(٠، ١، ٠) + \text{أ}_\text{ع}(٠، ٠، ١)$$
$$= \text{أ}_\text{س}\overleftarrow{\text{س}} + \text{أ}_\text{ص}\overleftarrow{\text{ص}} + \text{أ}_\text{ع}\overleftarrow{\text{ع}}$$

مثال

٥) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = ٢\overleftarrow{\text{س}} - ٣\overleftarrow{\text{ص}} + \overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = -\overleftarrow{\text{س}} - ٢\overleftarrow{\text{ص}}$ أوجد

أ) $٢\overleftarrow{\text{أ}} - ٣\overleftarrow{\text{ب}}$

ب) $\|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}\|$ ، $\|\overleftarrow{\text{أ}}\| + \|\overleftarrow{\text{ب}}\|$ ماذا تستنتج؟

الحل

أ) $٢\overleftarrow{\text{أ}} - ٣\overleftarrow{\text{ب}} = ٢(٢\overleftarrow{\text{س}} - ٣\overleftarrow{\text{ص}} + \overleftarrow{\text{ع}}) - ٣(-\overleftarrow{\text{س}} - ٢\overleftarrow{\text{ص}})$

$= ٤\overleftarrow{\text{س}} - ٦\overleftarrow{\text{ص}} + ٢\overleftarrow{\text{ع}} + ٣\overleftarrow{\text{س}} + ٦\overleftarrow{\text{ص}}$

$\therefore ٢\overleftarrow{\text{أ}} - ٣\overleftarrow{\text{ب}} = ٧\overleftarrow{\text{س}} + ٢\overleftarrow{\text{ع}}$

ب) $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = (٢\overleftarrow{\text{س}} - ٣\overleftarrow{\text{ص}} + \overleftarrow{\text{ع}}) + (-\overleftarrow{\text{س}} - ٢\overleftarrow{\text{ص}})$

$= \overleftarrow{\text{س}} - ٥\overleftarrow{\text{ص}} + \overleftarrow{\text{ع}}$

$\therefore \|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{١^٢ + (-٥)^٢ + ١^٢} = \sqrt{٢٧}$

$\|\overleftarrow{\text{أ}}\| + \|\overleftarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{٢^٢ + (-٣)^٢ + ١^٢} + \sqrt{(-١^٢) + (-٢)^٢}$

$= \sqrt{١٤} + \sqrt{٥}$

نلاحظ أن $\|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}\| \neq \|\overleftarrow{\text{أ}}\| + \|\overleftarrow{\text{ب}}\|$

حاول أن تحل

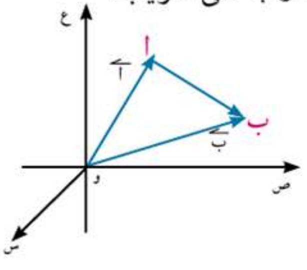
٦) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = -٣\overleftarrow{\text{ص}} - \overleftarrow{\text{ع}} + ٥\overleftarrow{\text{س}}$، $\overleftarrow{\text{ب}} = -٢\overleftarrow{\text{ع}} + ٣\overleftarrow{\text{س}}$ أوجد

أ) $٣\overleftarrow{\text{أ}} - ٥\overleftarrow{\text{ب}}$

ب) $\|\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}\|$

التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها

بفرض أن أ، ب نقطتان فى الفراغ، متجها موضعهما بالنسبة لنقطة الأصل هما $\overleftarrow{\text{وأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{وب}}$ على الترتيب.



$\because \overleftarrow{\text{وأ}} + \overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{وب}}$

$\therefore \overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{وب}} - \overleftarrow{\text{وأ}}$

أو $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}}$

مثال

(٦) إذا كان أ (-٢، ٣، ١) ، ب (٤، ٠، ٢) فإن

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

$= (٤، ٠، ٢) - (-٢، ٣، ١) = (٦، -٣، ١)$

$\overrightarrow{بأ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$

$= (-٢، ٣، ١) - (٤، ٠، ٢) = (-٦، ٣، -١)$

نلاحظ أن: $\overrightarrow{أب} = - \overrightarrow{بأ}$

حاول أن تحل

(٧) (أ) إذا كان أ (٢، -٣، ٠) ب (١، ٤، -١) أوجد $\overrightarrow{أب}$

(ب) إذا كان أ (١، ١، -٢)، $\overrightarrow{أب}$ = (٤، -١، ٢) أوجد إحداثيات نقطة ب

متجه الوحدة فى اتجاه متجه معلوم *The unit vector in the direction of agiven vector*

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س، أ_ص، أ_ع) \in ح^٣$ فإن متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ}$ يرمز له بالرمز $\overrightarrow{ى_أ}$ يعطى بالعلاقة:

$$\overrightarrow{ى_أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$$

مثال

(٧) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-٢، ٢، ١)، $\overrightarrow{ب}$ = (٣، ١، -٢) أوجد متجه الوحدة فى اتجاه كل من $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أب}$

الحل

$$\overrightarrow{ى_أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{(-٢، ٢، ١)}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}} = (\frac{-٢}{٣}، \frac{٢}{٣}، \frac{١}{٣})$$

$$\overrightarrow{ى_ب} = \frac{\overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|} = \frac{(٣، ١، -٢)}{\sqrt{٩ + ١ + ٤}} = (\frac{٣}{\sqrt{١٤}}، \frac{١}{\sqrt{١٤}}، \frac{-٢}{\sqrt{١٤}})$$

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

$= (٣، ١، -٢) - (-٢، ٢، ١) = (٥، -١، -٣)$

$$\therefore \overrightarrow{ى_{أب}} = \frac{\overrightarrow{أب}}{\|\overrightarrow{أب}\|}$$

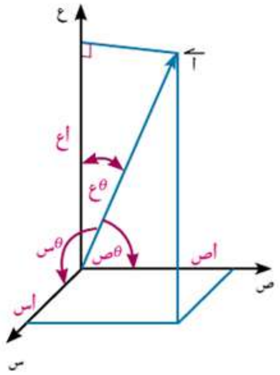
$$= \frac{(٥، -١، -٣)}{\sqrt{٢٥ + ١ + ٩}} = (\frac{٥}{\sqrt{٣٥}}، \frac{-١}{\sqrt{٣٥}}، \frac{-٣}{\sqrt{٣٥}})$$

حاول أن تحل

(٨) أوجد متجه الوحدة فى اتجاه كل من المتجهات الآتية:

(أ) $\overrightarrow{أ} = (٨، -٤، -٨)$ (ب) $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ (ج) $\overrightarrow{جـ} = ٣\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ع}$

زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه فى الفراغ



إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س، أ_ص، أ_ع)$ متجه فى الفراغ وكانت $(\theta_س، \theta_ص، \theta_ع)$ قياسات الزوايا التى يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحاور س، ص، ع على الترتيب فإن:

$أ_س = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_س$ ، $أ_ص = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ص$ ، $أ_ع = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ع$

$\therefore \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_س\,\overrightarrow{س} + \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ص\,\overrightarrow{ص} + \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ع\,\overrightarrow{ع}$

$= \|\overrightarrow{أ}\|$ (جتا $\theta_س\,\overrightarrow{س}$ + جتا $\theta_ص\,\overrightarrow{ص}$ + جتا $\theta_ع\,\overrightarrow{ع}$)

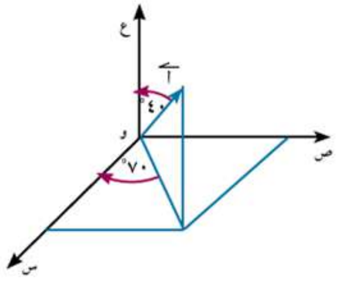
$(\theta_س، \theta_ص، \theta_ع)$ **تسمى زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$**

جتا $\theta_س$، جتا $\theta_ص$، جتا $\theta_ع$ **تسمى جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$**

لاحظ أن: جتا $\theta_س\,\overrightarrow{س}$ + جتا $\theta_ص\,\overrightarrow{ص}$ + جتا $\theta_ع\,\overrightarrow{ع}$ تمثل متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ}$ أى إن

$$جتا^٢ \theta_س + جتا^٢ \theta_ص + جتا^٢ \theta_ع = ١$$

مثال



(٨) الشكل المقابل يمثل متجه $\overrightarrow{أ}$ معياره ١٠ وحدات

(أ) عبر عن المتجه $\overrightarrow{أ}$ بالصورة الجبرية (المركبات الكارتيزية)

(ب) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

الحل

أولًا نحلل $\overrightarrow{أ}$ إلى مركبتين: الأولى فى اتجاه $\overrightarrow{وع}$ ومقدارها

$أ_ع = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ع$ = ١٠ جتا ٤٠ = ٧,٦٦

والثانية تقع فى المستوى الإحداثى س ص

$أ_{س ص} = \|\overrightarrow{أ}\|$ جا $\theta_ع$ = ١٠ جا ٤٠ = ٦,٤٢٨

الآن نحلل المركبة $أ_{س ص}$ إلى مركبتين: الأولى فى اتجاه $\overrightarrow{وس}$ ومقدارها

$أ_س = أ_{س ص}$ جتا ٧٠ = ٦,٤٢٨ جتا ٧٠ = ٢,١٩٩

والثانية فى اتجاه $\overrightarrow{وص}$ ومقدارها

$أ_ص = أ_{س ص}$ جا ٧٠ = ٦,٤٢٨ جا ٧٠ = ٦,٠٤

وبذلك تكون الصورة الكارتيزية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى

$$\overrightarrow{أ} = أ_{س}\,\overrightarrow{س} + أ_{ص}\,\overrightarrow{ص} + أ_{ع}\,\overrightarrow{ع}$$
$$= ٢,١٩٩\,\overrightarrow{س} + ٦,٠٤\,\overrightarrow{ص} + ٧,٦٦\,\overrightarrow{ع}$$

ثانيًا: ولإيجاد قياسات زوايا الاتجاه نوجد متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$

$$\overrightarrow{ى_{أ}} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{١}{١٠}(٢,١٩٩\,\overrightarrow{س} + ٦,٠٤\,\overrightarrow{ص} + ٧,٦٦\,\overrightarrow{ع})$$
$$= ٠,٢١٩٩\,\overrightarrow{س} + ٠,٦٠٤\,\overrightarrow{ص} + ٠,٧٦٦\,\overrightarrow{ع}$$

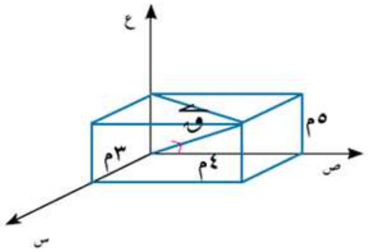
$\therefore$ جتا $\theta_{س}$ = ٠,٢١٩٩ ومنها $\theta_{س}$ = جتا$^{-١}$ (٠,٢١٩٩) = ٧٧,٣°

جتا $\theta_{ص}$ = ٠,٦٠٤ ومنها $\theta_{ص}$ = جتا$^{-١}$ (٠,٦٠٤) = ٥٢,٨٤°

جتا $\theta_{ع}$ = ٠,٧٦٦ ومنها $\theta_{ع}$ = جتا$^{-١}$ (٠,٧٦٦) = ٤٠°

٩ حاول أن تحل

(٩) الشكل المقابل يمثل قوة $\overrightarrow{ق}$ مقدارها ٢٠٠ نيوتن



(أ) عبر عن القوة $\overrightarrow{ق}$ بالصورة الجبرية.

(ب) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة $\overrightarrow{ق}$.

تمارين (١-٢)

أكمل ما يأتى:

(١) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-٣، ٤، ٢) فإن $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ...

(٢) إذا كان $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٣\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ فإن $\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$ = ...

(٣) متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$ حيث أ (-١، ٢، ٠) ، ب (٣، -١، ٢) هو ....

(٤) المتجه $\overrightarrow{أ} = ٣\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ يصنع زاوية قياسها .... مع الاتجاه الموجب لمحور س.

(٥) المتجه $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$ يصنع زاوية قياسها .... مع الاتجاه الموجب لمحور ع.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٦) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-٢، ك، ١) وكان $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ٣ وحدات فإن ك = ...

(أ) ٤ (ب) -٤ (ج) ± ٢ (د) $\sqrt{١٤}$

(٧) إذا كان ٣٠°، ٧٠°، θ هى زوايا الاتجاه لمتجه فإن احدى قيم θ = ...

أ) ١٠٠°   ب) ٨٠°   ج) ٢٦٠°   د) ٨٢,٣٥٥°

(٨) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-١، ٥، -٢)، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣، ١، ١) وكان $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ فإن $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ...

أ) $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٦$\overrightarrow{\text{ص}}$ - $\overrightarrow{\text{ع}}$ ب) -$\overrightarrow{\text{س}}$ - ٦$\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$

ج) $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$ - ٣$\overrightarrow{\text{ع}}$ د) $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$ - $\overrightarrow{\text{ع}}$

(٩) جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-٢، ١، ٢) هى ....

أ) (-٢، ١، ٢)   ب) ($\frac{-٢}{٣}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{٢}{٣}$)   ج) ($\frac{٥}{-٢}$، ٥، $\frac{٥}{٢}$)   د) (-١، ١، ١)

أجب عما يأتى:

(١٠) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢، -٣، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤، -٢، ٠) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (-٦، ٠، ٣) أوجد كلًا من المتجهات الآتية:

أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ب) ٣$\overrightarrow{\text{أ}}$ - $\frac{١}{٣}$$\overrightarrow{\text{جـ}}$ ج) $\frac{٣}{٢}$$\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\frac{٢}{٣}$$\overrightarrow{\text{جـ}}$

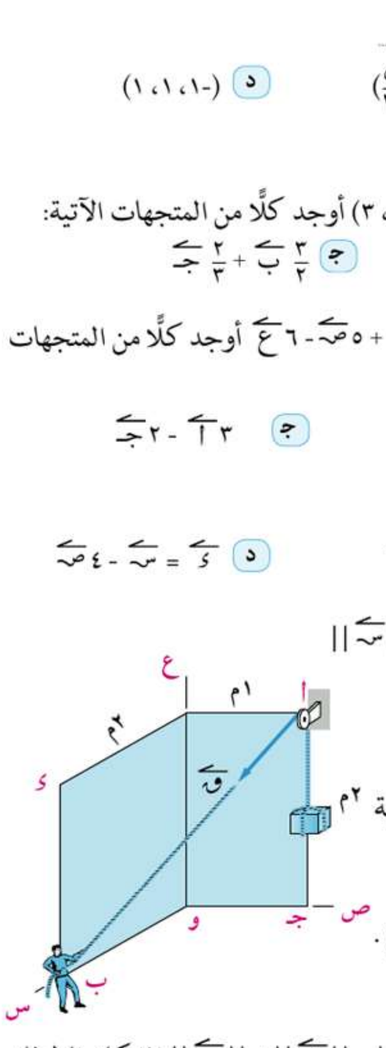
(١١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢$\overrightarrow{\text{س}}$ - ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٥$\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$ - ٢$\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ٤$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٥$\overrightarrow{\text{ص}}$ - ٦$\overrightarrow{\text{ع}}$ أوجد كلًا من المتجهات الآتية:

أ) ٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ب) $\frac{١}{٢}$$\overrightarrow{\text{ب}}$ - $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ج) ٣$\overrightarrow{\text{أ}}$ - ٢$\overrightarrow{\text{جـ}}$

(١٢) أوجد معيار كل من المتجهات الآتية:

أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢، -١، ٠)   ب) $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١، ٢، -٢)   ج) $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{ع}}$ د) $\overrightarrow{\text{ى}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$

(١٣) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (ك، ٠، ٠) ، $\overrightarrow{\text{س}}$ = (١، ٠، ٠) أثبت أن $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = |ك| $\|\overrightarrow{\text{س}}\|$



(١٤) إذا كانت قوة الشد فى الخيط تساوى ٢١ نيوتن أوجد المركبات الجبرية للقوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ فى اتجاهات محاور الاحداثيات.

(١٥) سؤال مفتوح: إذا كان المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ يوازى المستوى الإحداثى ص ع . ماذا يمكن أن تقول عن إحداثيات المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$

(١٦) سؤال مفتوح: إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين فى ح^{٣}. هل $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\|$ = $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ + $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ إذا كان الطرفان غير متساويين. أىُّ الطرفين هو الأكبر؟

(١٧) تفكير إبداع: أوجد الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ الذى معياره ٥ وحدات، و يصنع مع محاور الإحداثيات زوايا اتجاه متساوية فى القياس.

الوحدة الأولى

٣ - ١ ضرب المتجهات

Vectors multiplication

سوف تتعلم

- الضرب القياسى لمتجهين فى المستوى وفى الفراغ.
- توازى وتعامد متجهين.
- الزاوية بين متجهين.
- مركبة متجه فى اتجاه متجه آخر .
- مسقط متجه فى اتجاه متجه آخر.
- الشغل المبذول بواسطة قوة.
- الضرب الاتجاهى لمتجهين فى المستوى وفى الفراغ.
- المعنى الهندسى لحاصل الضرب الاتجاهى.
- المجموعة اليمينية من متجهات الوحدة.
- حاصل الضرب الثلاثى القياسى.
- المعنى الهندسى لحاصل الضرب الثلاثى القياسى.

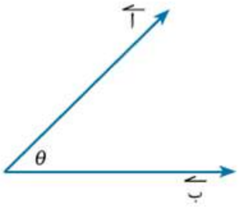
مصطلحات أساسية

- ضرب قياسى scalar product
- ضرب اتجاهى vectar product
- مركبة component
- متجه الوحدة unit vector
- الشغل work
- قاعدة اليد اليمنى right hand rule
- الضرب الثلاثى القياسى scalar triple product

تعلمت سابقًا إجراء بعض العمليات على المتجهات، مثل الجمع وضرب المتجه فى عدد حقيقى، ولكنك قد تكون قد تساءلت: هل يمكن إجراء عملية الضرب فى حقل المتجهات؟ والجواب: نعم. هناك نوعان من ضرب المتجهات، هما الضرب القياسى لمتجهين والضرب الاتجاهى لمتجهين. وفى هذا الدرس نتناول هذين النوعين من الضرب بالشرح والتحليل، وخواصهما الجبرية والهندسية، وتطبيقاتهما الفيزيائية؛ ليكون ذلك معينًا لك فى دراسة الميكانيكا.

الضرب القياسى لمتجهين Scalar product of two vectors (Dot product)

فكر و ناقش

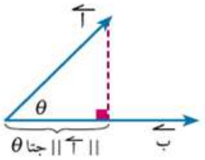


إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما θ فأوجد:

١- مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$.

٢- حاصل ضرب معيار المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ ومركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$.

من بند **فكر وناقش** نستنتج أن:



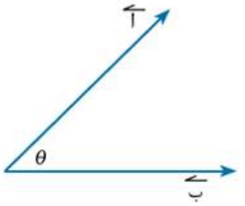
١- مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ تساوى $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا θ

٢- حاصل ضرب معيار المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ ومركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ يساوى $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| \, \|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا θ

والقيمة المطلقة لهذا المقدار تعبر عن مساحة المستطيل الذى بعداه معيار المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ ومركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$.

تعلم

الضرب القياسى لمتجهين Scalar product of two vectors



إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما θ فإن مساحة المستطيل الذى بعداه معيار أحد المتجهين ومركبة المتجه الآخر عليه تعرف بالضرب القياسى للمتجهين ويرمز لهما بالرمزين $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$

أى إن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جتا θ

مثال

(١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين، قياس الزاوية ٦٠° وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ٢ $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ٨ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$

الحل

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ٢ $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ٨ ⟵ $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ٨ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ٤

من تعريف الضرب القياسى

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جتا θ

= ٨ × ٤ × جتا ٦٠° = ١٦

حاول أن تحل

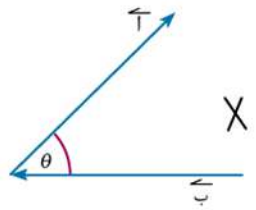
(١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما ١٣٥° وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ٦ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ١٠ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$

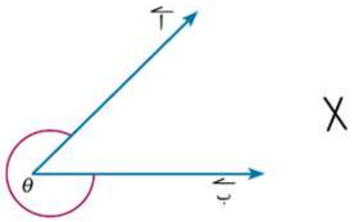
تفكير ناقد: ما الحالات التى يكون فيها حاصل الضرب القياسى يساوى الصفر؟

ملحوظات مهمة

١- لتحديد الزاوية بين المتجهين يجب أن يكون المتجهان خارجين (أو داخلين) لنفس النقطة.

٢- قياس الزاوية بين المتجهين ∈ [٠ ، π]





مثال

(٢) إذا كانت $\overrightarrow{\text{س}}$، $\overrightarrow{\text{ص}}$، $\overrightarrow{\text{ع}}$ متجهات الوحدة لمجموعة يمينية، فأوجد كل من $\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{س}}$، $\overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}}$، $\overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}$

الحل

$\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{س}} = \|\overrightarrow{\text{س}}\| \, \|\overrightarrow{\text{س}}\|$ جتا ٠°

= ١ × ١ × ١ = ١

بالمثل $\overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}}$ = ١ ، $\overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}$ = ١

> **تذكر أن**
> معيار متجه الوحدة يساوى الواحد الصحيح.

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت $\overrightarrow{\text{س}}$، $\overrightarrow{\text{ص}}$، $\overrightarrow{\text{ع}}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة، فأوجد كل من $\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{س}}$

خواص الضرب القياسى

من الأمثلة السابقة يمكننا استنتاج خواص الضرب القياسى كما يلى:

١- $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$ **خاصية الإبدال**

٢- $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{٢}$

٣- $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = ٠$ **إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متعامدين (شرط تعامد متجهين)**

٤- $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}) = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ}}$ **خاصية التوزيع**

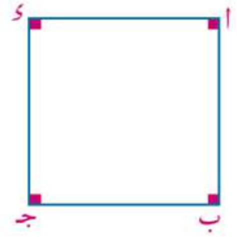
٥- $(\text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}}) \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}) = \text{ك}(\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}})$ **حيث ك عددًا حقيقيًا**

مثال

(٣) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠سم . أوجد كلًّا من

(أ) $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{ءجـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{بجـ}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـأ}}$

الحل



(أ) ∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءجـ}}$ متوازيان وفى نفس الاتجاه

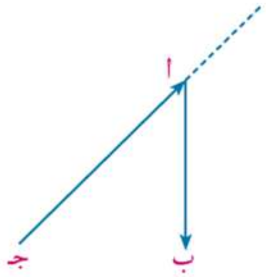
∴ قياس الزاوية بينهما = صفر°

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{ءجـ}} = \|\overrightarrow{\text{أب}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ءجـ}}\|$ جتا ٠°

$= ١٠ \times ١٠ \times ١ = ١٠٠$

(ب) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ متعامدان **قياس الزاوية بينهما ٩٠°**

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{بجـ}}$ = صفر



(جـ) ∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ **لا يبدآن من نفس النقطة**

∴ نمد $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ على امتداده فتصبح قياس الزاوية بينهما ١٣٥°

$\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـأ}} = \|\overrightarrow{\text{أب}}\| \, \|\overrightarrow{\text{جـأ}}\|$ جتا ١٣٥

$= ١٠ \times ١٠\sqrt{٢} \times \frac{-١}{\sqrt{٢}} = -١٠٠$

حل آخر الفقرة (جـ)

$\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـأ}} = \overrightarrow{\text{أب}} \cdot (-\overrightarrow{\text{أجـ}})$

$= -\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أجـ}}$

$= -\|\overrightarrow{\text{أب}}\| \, \|\overrightarrow{\text{جـأ}}\|$ جتا ٤٥

$= -١٠ \times ١٠\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = -١٠٠$

حاول أن تحل

(٣) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ سم. أوجد كلًا من:

(أ) $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أجـ}$ (ب) $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{بجـ}$ (جـ) $(٢\ \overrightarrow{أب}) \cdot (٣\overrightarrow{جـب})$

تعلم

الضرب القياسى لمتجهين فى النظام الإحداثى المتعامد

The scalar product of two vectors in orthogonal coordinate system

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س \vec{س} + أ_ص \vec{ص} + أ_ع \vec{ع})$، $\overrightarrow{ب} = (ب_س \vec{س} + ب_ص \vec{ص} + ب_ع \vec{ع})$ **فإن**

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = (أ_س \vec{س} + أ_ص \vec{ص} + أ_ع \vec{ع}) \cdot (ب_س \vec{س} + ب_ص \vec{ص} + ب_ع \vec{ع})$ **باستخدام خاصية التوزيع**

$= أ_س ب_س \vec{س} \cdot \vec{س} + أ_س ب_ص \vec{س} \cdot \vec{ص} + أ_س ب_ع \vec{س} \cdot \vec{ع}$

$+ أ_ص ب_س \vec{ص} \cdot \vec{س} + أ_ص ب_ص \vec{ص} \cdot \vec{ص} + أ_ص ب_ع \vec{ص} \cdot \vec{ع}$

$+ أ_ع ب_س \vec{ع} \cdot \vec{س} + أ_ع ب_ص \vec{ع} \cdot \vec{ص} + أ_ع ب_ع \vec{ع} \cdot \vec{ع}$

وحيث إن $\vec{س} \cdot \vec{س} = \vec{ص} \cdot \vec{ص} = \vec{ع} \cdot \vec{ع} = ١$

$\vec{س} \cdot \vec{ص} = \vec{ص} \cdot \vec{ع} = \vec{ع} \cdot \vec{س} =$ صفر

$\therefore \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = أ_س ب_س + أ_ص ب_ص + أ_ع ب_ع$

ملاحظة

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص)$ فى المستوى الإحداثى

فإن $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = أ_س ب_س + أ_ص ب_ص$

مثال

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ} = ٢\vec{س} + ٣\vec{ص} + ٤\vec{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = -\vec{س} - ٢\vec{ص} + \vec{ع}$ أوجد $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$

الحل

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = (٢، ٣، ٤) \cdot (-١، -٢، ١)$

$= ٢ \times -١ + ٣ \times (-٢) + ٤ \times ١$

$= -٢ - ٦ + ٤ = -٤$

حاول أن تحل

(٤) أوجد $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ فى كل من الحالات الآتية:

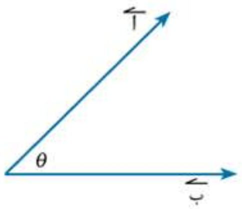
(أ) $\overrightarrow{أ} = (-١، ٣، ٢)$، $\overrightarrow{ب} = ٤\vec{س} - ٢\vec{ص} + ٥\vec{ع}$ ماذا نستنتج؟

(ب) $\overrightarrow{أ} = ٢\vec{س} - \vec{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = \vec{ص} - ٣\vec{س}$

تعلم

الزاوية بين متجهين

the angle between two vectors



تعلم أن $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|$ جتا θ

حيث θ قياس الزاوية بين المتجهين غير الصفريين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $٠° \leqslant \theta \leqslant ١٨٠°$

$\therefore$ جتا $\theta = \dfrac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|}$

حالات خاصة:

١- إذا كان جتا $\theta = ١$ فإن $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متوازيان، وفى نفس الاتجاه.

٢- إذا كان جتا $\theta = -١$ فإن $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متوازيان، وفى عكس الاتجاه.

٣- إذا كان جتا $\theta = ٠$ فإن $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متعامدان.

مثال

٥ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{أ} = ٤\vec{س} + ٣\vec{ص} + ٧\vec{ع}$ ، $\vec{ب} = ٢\vec{س} + ٥\vec{ص} + ٤\vec{ع}$.

الحل

$\|\vec{أ}\| = \sqrt{٤^٢ + ٣^٢ + ٧^٢} = \sqrt{٧٤}$

$\|\vec{ب}\| = \sqrt{٢^٢ + ٥^٢ + ٤^٢} = \sqrt{٤٥}$

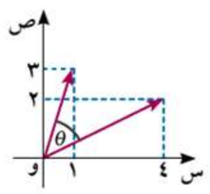
جتا $\theta = \dfrac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|}$

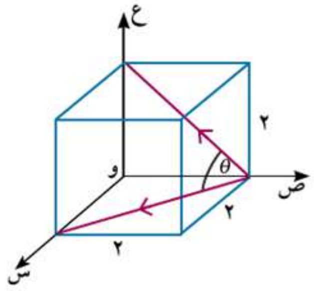
$= \dfrac{(٤، ٣، ٧) \cdot (٢، ٥، ٤)}{\sqrt{٧٤}\sqrt{٤٥}} = \dfrac{٨ + ١٥ + ٢٨}{\sqrt{٧٤}\sqrt{٤٥}} = \dfrac{٥١}{\sqrt{٧٤}\sqrt{٤٥}}$

$\therefore$ جتا$^{-١}$ $\left(\dfrac{٥١}{\sqrt{٧٤}\sqrt{٤٥}}\right)$ = جتا$^{-١}$ $(٠,٨٨٣٨) = ٢٧,٩°$

حاول أن تحل

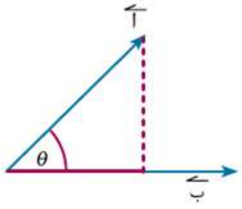
٥ أوجد θ فى كل مما يأتى:





تعلم

مركبة (مسقط) متجه فى اتجاه متجه آخر.



إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين، فإن مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ (ويرمز لها $\text{أ}_{\text{ب}}$) هى

$$\text{أ}_{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

مثال

(٦) أوجد مركبة القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} - ٣\overrightarrow{\text{ص}} + ٥\overrightarrow{\text{ع}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أب}}$ حيث أ(١، ٤، ٠)، ب(-١، ٢، ٣)

الحل

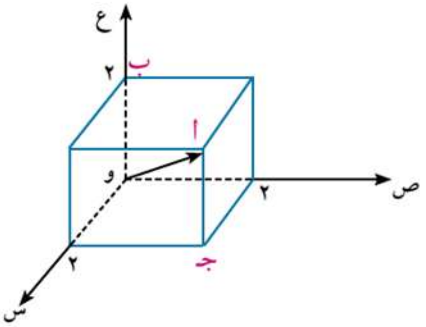
$$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$$

$$= (-١، ٢، ٣) - (١، ٤، ٠) = (-٢، -٢، ٣)$$

$$\text{مركبة القوة } \overrightarrow{\text{ق}} \text{ فى اتجاه } \overrightarrow{\text{أب}} = \frac{\overrightarrow{\text{ق}} \bullet \overrightarrow{\text{أب}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\|}$$

$$= \frac{(٢، -٣، ٥) \bullet (-٢، -٢، ٣)}{\sqrt{(-٢)^٢ + (-٢)^٢ + ٣^٢}} = \frac{١٧}{\sqrt{١٧}} = \sqrt{١٧}$$

حاول أن تحل



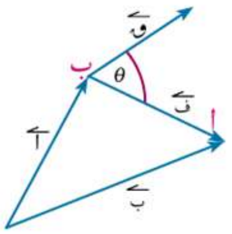
(٦) الشكل المقابل يمثل مكعبًا طول ضلعه ٢ وحدة طول أوجد مسقط المتجه $\overrightarrow{\text{وأ}}$ على المتجه $\overrightarrow{\text{جـب}}$

تفكير ناقد: متى تنعدم مركبة متجه فى اتجاه متجه آخر؟

تعلم

استخدام الضرب القياسى لإيجاد الشغل المبذول من قوة

Using scalar product to find the work done by aforce



إذا اثرت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ على جسم فحرّكته إزاحة $\overrightarrow{\text{ف}}$ فإننا نقول: إن القوة قد بذلت شغلًا.

ويمكن إيجاد هذا الشغل باستخدام العلاقة:

$$\text{شـ} = \overrightarrow{\text{ق}} \bullet \overrightarrow{\text{ف}} = \|\overrightarrow{\text{ق}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ف}}\| \text{ جتا } \theta$$

وحدة قياس الشغل هى وحدة قياس القوة × وحدة قياس الإزاحة.

مثال

> **أضف إلى معلوماتك**
> إذا كانت وحدة قياس القوة هى النيوتن، ووحدة قياس الإزاحة هى المتر، فإن وحدة قياس الشغل هى الجول.

(٧) أثرت قوة ق⃗ = س⃗ - ٢ص⃗ + ٣ع⃗ نيوتن فى جسم فحركته من نقطة أ (-٣، ١، ٠) إلى نقطة ب(٢، ٠، -٢). أوجد الشغل المبذول من القوة ق⃗ حيث الإزاحة مقدرة بالمتر.

الحل

ف⃗ = أب⃗ = ب⃗ - أ⃗

= (٢، ٠، -٢) - (-٣، ١، ٠)

= (٥، -١، -٢)

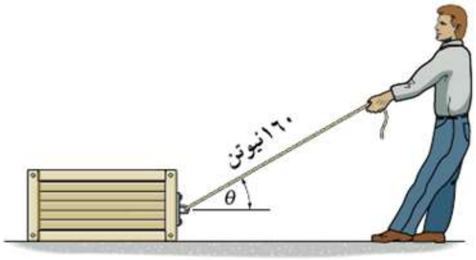
شـ = ق⃗ • ف⃗

= (١، -٢، ٣) •(٥، -١، -٢) = ١ نيوتن . متر (جول)

حاول أن تحل

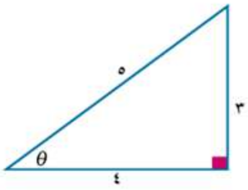
(٧) يتحرك جسيم تحت تأثير القوة ق⃗ = -٦س⃗ + ٨ص⃗ من النقطة أ (-١، ٣) إلى النقطة ب (٤، ٧). أوجد الشغل المبذول من القوة.

مثال



(٨) **فى الشكل المقابل**: شخص يسحب صندوقًا بقوة شد مقدارها ١٦٠ نيوتن، وتميل على الأفقى بزاوية ظل قياسها $\frac{٣}{٤}$ ليحركه مسافة أفقية قدرها ٥ أمتار. أوجد الشغل المبذول من قوة الشد.

الحل



الشغل = ق⃗ • ف⃗

= || ق⃗ || || ف⃗ || جتا θ

= ١٦٠ × ٥ × $\frac{٤}{٥}$

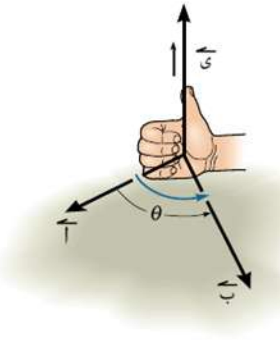
= ٦٤٠ جول

حاول أن تحل

(٨) **فى الشكل المقابل**: شخص يرفع صندوقًا بواسطة خيط يمر على بكرة ملساء، ويميل على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠. فإذا كانت قوة الشد فى الخيط ١٢٠ نيوتن ليرتفع الصندوق عن سطح الأرض مسافة ٣ أمتار، فأوجد الشغل المبذول من قوة الشد فى الخيط.

تعلم

الضرب الاتجاهى لمتجهين
Vector product of two vectors (cross product)

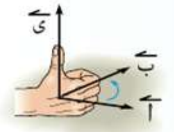


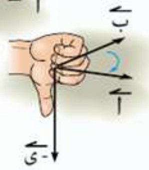
إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين فى مستوى، يحصران بينهما زاوية قياسها θ وكان $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة عموديًّا على المستوى الذى يحوى $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ **فإن** حاصل الضرب الاتجاهى للمتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ يُعطى بالعلاقة

$$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (\|\overleftarrow{أ}\|\ \|\overleftarrow{ب}\| \text{ جا } \theta)\ \overleftarrow{ى}$$

و يتحدد اتجاه متجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ (لأعلى أم أسفل) طبقًا لقاعدة اليد اليمنى، حيث تشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلى اتجاه الدوران من المتجه $\overleftarrow{أ}$ إلى المتجه $\overleftarrow{ب}$ فيشير الإبهام إلى اتجاه المتجه $\overleftarrow{ى}$

ملحوظات هامة





١- **إذا كان** $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{ى}$ فإن $\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}$ تكون فى اتجاه المتجه $-\overleftarrow{ى}$ **أى أن** $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = -\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}$

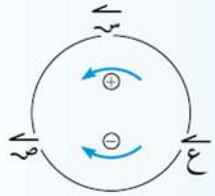
٢- بتطبيق قاعدة اليد اليمنى على مجموعة يمينية من متجهات الوحدةالمتعامدة **فإن**

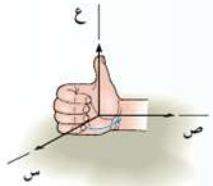
$\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ص} = \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ع} = \overleftarrow{س}$

$\overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{س} = \overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ع} = -\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{ص} = -\overleftarrow{س}$

$\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{س} = -\overleftarrow{ع}$





٣- لأى متجه $\overleftarrow{أ}$ يكون $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{أ} = \overleftarrow{و}$ حيث $\overleftarrow{و}$ المتجه الصفرى

مثال

(٩) $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهان فى مستوى، قياس الزاوية بينهما ٧٠° فإذا كان $\|\overleftarrow{أ}\| = ١٥$ ، $\|\overleftarrow{ب}\| = ١٧,٥$ أوجد معيار $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$

الحل

$\because$ $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (\|\overleftarrow{أ}\|\ \|\overleftarrow{ب}\| \text{ جا } \theta)\ \overleftarrow{ى}$

$\therefore$ $\|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\| = \|\overleftarrow{أ}\|\ \|\overleftarrow{ب}\| \text{ جا } \theta = ١٥ \times ١٧,٥ \times \text{ جا } ٧٠ = ٢٤٦,٦٧$

حاول أن تحل

(٩) إذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -٦٥\ \overrightarrow{ى}$ وكان $\|\overrightarrow{أ}\| = ٥$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٢٦$ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

الضرب الاتجاهى فى الإحداثيات الكارتيزية

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ متجهين **فإن**

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (أ_س \overrightarrow{س} + أ_ص \overrightarrow{ص} + أ_ع \overrightarrow{ع}) \times (ب_س \overrightarrow{س} + ب_ص \overrightarrow{ص} + ب_ع \overrightarrow{ع})$$

$$= أ_س ب_س \overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س} + أ_س ب_ص \overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} + أ_س ب_ع \overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع}$$

$$+ أ_ص ب_س \overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} + أ_ص ب_ص \overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ص} + أ_ص ب_ع \overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع}$$

$$+ أ_ع ب_س \overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} + أ_ع ب_ص \overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} + أ_ع ب_ع \overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ع}$$

وحيث إن $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{و}$

$\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص}$ فإن

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = ٠ + أ_س ب_ص \overrightarrow{ع} + أ_س ب_ع (-\overrightarrow{ص})$$

$$+ أ_ص ب_س (-\overrightarrow{ع}) + ٠ + أ_ص ب_ع (\overrightarrow{س})$$

$$+ أ_ع ب_س (\overrightarrow{ص}) + أ_ع ب_ص (-\overrightarrow{س}) + ٠$$

$$= (أ_ص ب_ع - أ_ع ب_ص)\overrightarrow{س} + (أ_ع ب_س - أ_س ب_ع)\overrightarrow{ص} + (أ_س ب_ص - أ_ص ب_س)\overrightarrow{ع}$$

والصورة الأخيرة يمكن كتابتها على شكل محدد على النظم ٣ × ٣ كالآتى:

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$$

حالة خاصة

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص)$، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص)$ فى المستوى الإحداثى س ص **فإن**

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ أ_س & أ_ص & ٠ \\ ب_س & ب_ص & ٠ \end{vmatrix} = (أ_س ب_ص - أ_ص ب_س)\ \overrightarrow{ع}$$

مثال

(١٠) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (-٢، ٣، ١)، $\overleftarrow{ب}$ = (١، ٢، ٤) أوجد $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ ثم استنتج متجه الوحدة العمودى على المستوى الذى يحوى المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$

الحل

$$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ -٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= (٣ \times ٤ - ٢ \times ١)\,\overleftarrow{س} - (-٢ \times ٤ - ١ \times ١)\,\overleftarrow{ص} + (-٢ \times ٢ - ٣ \times ١)\,\overleftarrow{ع}$$

$$= ١٠\,\overleftarrow{س} + ٩\,\overleftarrow{ص} - ٧\,\overleftarrow{ع}$$

متجه الوحدة العمودى على مستوى $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = $\dfrac{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}}{\|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\|}$

$$\therefore \overleftarrow{ى} = \frac{١٠\overleftarrow{س} + ٩\overleftarrow{ص} - ٧\overleftarrow{ع}}{\sqrt{١٠^٢ + ٩^٢ + (-٧)^٢}} = \frac{١٠}{\sqrt{٢٣٠}}\overleftarrow{س} + \frac{٩}{\sqrt{٢٣٠}}\overleftarrow{ص} - \frac{٧}{\sqrt{٢٣٠}}\overleftarrow{ع}$$

حاول أن تحل

(١٠) إذا كان $\|\overleftarrow{أ}\|$ = ٦ وكانت جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{أ}$ هى على الترتيب $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ وكان المتجه $\overleftarrow{ب}$ = (-٢ ، ٣ ، ٥) أوجد $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$

خواص حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما θ فإن:

١- $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = -\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}$ (الضرب الاتجاهى عملية غير إبدالية)

٢- $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{أ} = \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{و}$

٣- إذا كان $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{و}$ فإما $\overleftarrow{أ}$ // $\overleftarrow{ب}$ أو أحد المتجهين أو كلاهما يساوى $\overleftarrow{و}$

٤- $\overleftarrow{أ} \times (\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ}) = (\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}) + (\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{جـ})$ خاصية التوزيع

٥- $(ك\,\overleftarrow{أ}) \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{أ} \times (ك\,\overleftarrow{ب}) = ك(\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب})$ حيث ك عدد حقيقى

توازى متجهين

رأينا فى خواص الضرب الاتجاهى أن المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ يكونان متوازيين إذا وفقط إذا كان: $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{و}$

أى $(أ_ص\, ب_ع - أ_ع\, ب_ص)\,\overrightarrow{س} + (أ_ع\, ب_س - أ_س\, ب_ع)\,\overrightarrow{ص} + (أ_س\, ب_ص - أ_ص\, ب_س)\,\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{و}$

أى $أ_ص\, ب_ع = أ_ع\, ب_ص$ ، $أ_س\, ب_ع = أ_ع\, ب_س$ ، $أ_س\, ب_ص = أ_ص\, ب_س$

أى $\frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$ ، $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$ ، $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص}$

أى $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

وبفرض أى من النسب = ك يكون

$أ_س = ك\, ب_س$ ، $أ_ص = ك\, ب_ص$ ، $أ_ع = ك\, ب_ع$

$\therefore \overrightarrow{أ} = أ_س\, \overrightarrow{س} + أ_ص\, \overrightarrow{ص} + أ_ع\, \overrightarrow{ع}$

$\therefore \overrightarrow{أ} = ك\, \overrightarrow{ب}$

عندما تكون $ك > ٠$ يكون المتجهان متوازيين وفى نفس الاتجاه، وعندما تكون $ك < ٠$ يكون المتجهان متوازيين وفى عكس الاتجاه.

مثال

(١١) إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ} = (٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + م\overrightarrow{ع})$ يوازى المتجه $\overrightarrow{ب} = (\overrightarrow{س} + ك\overrightarrow{ص} + ٨\overrightarrow{ع})$
أوجد قيمة كل من م، ك

الحل

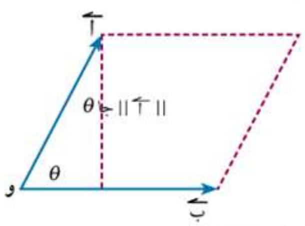
$\because \overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$ $\quad \therefore \frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

$\therefore \frac{٢}{١} = \frac{-٣}{ك} = \frac{م}{٨}$ $\quad \therefore ك = \frac{١ \times -٣}{٢} = \frac{-٣}{٢}$ ، $م = \frac{٢ \times ٨}{١} = ١٦$

حاول أن تحل

(١١) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٢، -٣)$ وكان $\overrightarrow{ب} \parallel \overrightarrow{أ}$ فإذا كان $\|\overrightarrow{ب}\| = ٣\sqrt{١٣}$ أوجد $\overrightarrow{ب}$.

المعنى الهندسى للضرب الاتجاهى لمتجهين



نعلم أن $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\|\, \|\overrightarrow{ب}\|$ جا θ

$= \|\overrightarrow{ب}\| \times ل$ حيث $ل = \|\overrightarrow{أ}\|$ جا θ

= مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ}$ ضلعان متجاوران فيه

= ضعف مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ}$ ضلعان متجاوران فيه

مثال

(١٢) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-٣ ، ١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ٤ ، -١) أوجد مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران فيه.

الحل

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (-٣ ، ١ ، ٢) \times (٣ ، ٤ ، -١)$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٣ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ & -١ \end{vmatrix} = (-٩)\,\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} - ١٥\,\overrightarrow{ع}$$

$$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \sqrt{(-٩)^٢ + (٣)^٢ + (-١٥)^٢} = ٣\sqrt{٣٥}$$

∴ مساحة متوازى الضلاع = $٣\sqrt{٣٥}$ وحدة مساحة.

حاول أن تحل

(١٢) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٢ ، -٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ٥، -١) أوجد مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان.

تعلم

الضرب الثلاثى القياسى *Scalar triple product*

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ متجهات فإن المقدار $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}$ يعرف بحاصل الضرب الثلاثى القياسى. الذى له كثير من التمثيلات فى مجال الاستاتيكا (لاحظ عدم وجود أقواس حيث لا معنى لإجراء الضرب القياسى أولًا)

وبفرض $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$، $أ_ص$، $أ_ع$)، $\overrightarrow{ب}$ = ($ب_س$، $ب_ص$، $ب_ع$) ، $\overrightarrow{جـ}$ = ($جـ_س$، $جـ_ص$، $جـ_ع$)

فإن $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}$

$$= (أ_س\overrightarrow{س} + أ_ص\overrightarrow{ص} + أ_ع\overrightarrow{ع}) \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$$

$$= (أ_س\overrightarrow{س} + أ_ص\overrightarrow{ص} + أ_ع\overrightarrow{ع}) \cdot [(ب_ص\, جـ_ع - ب_ع\, جـ_ص)\,\overrightarrow{س} - (ب_س\, جـ_ع - ب_ع\, جـ_س)\,\overrightarrow{ص}$$
$$+ (ب_س\, جـ_ص - ب_ص\, جـ_س)\,\overrightarrow{ع}\,]$$

$$أ_س(ب_ص\, جـ_ع - ب_ع\, جـ_ص) - أ_ص(ب_س\, جـ_ع - ب_ع\, جـ_س) + أ_ع(ب_س\, جـ_ص - ب_ص\, جـ_س)$$

$$= \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$$

خواص الضرب الثلاثى القياسى

١- الضرب الثلاثى القياسى قيمته لا تتغير إذا كانت ترتيب المتجهات فى ترتيب دورى واحد.

$\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}) = \overrightarrow{ب} \cdot (\overrightarrow{جـ} \times \overrightarrow{أ}) = \overrightarrow{جـ} \cdot (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$ **لاحظ الترتيب الدورى** $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$

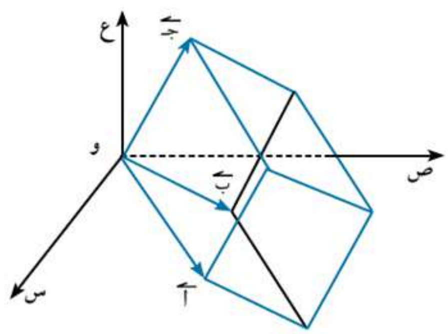
٢- إذا كانت المتجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ فى مستوى واحد فإن حاصل الضرب الثلاثى القياسى ينعدم

أى إن $\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}) =$ صفر

المعنى الهندسى لحاصل الضرب الثلاثى القياسى

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ ثلاثة متجهات، تكون ثلاثة أضلاع غير متوازية فى متوازى سطوح، فإن حجم متوازى السطوح = القيمة المطلقة لحاصل الضرب الثلاثى القياسى.

أى إن حجم متوازى السطوح $= |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}|$



مثال

(١٢) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أضلاع متجاورة يمثلها المتجهات $\overrightarrow{أ}$ = (٢، ١، ٣)، $\overrightarrow{ب}$ = (-١ ، ٣ ، ٢)، $\overrightarrow{جـ}$ = (١ ، ١ ، -٢)

الحل

حجم متوازى السطوح $= |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}|$ (١)

$$\therefore \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ -١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ١ & -٢ \end{vmatrix} = -٢٨$$

أى أن حجم متوازى السطوح= |-٢٨| = ٢٨ وحدة حجم

حاول أن تحل

(١٣) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف غير متوازية، يمثلها المتجهات $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، -٤ ، ١)، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ٢ ، -٣)، $\overrightarrow{جـ}$ = (٣ ، ٢، ٢)

تمـــارين (١-٣)

أكمل ما يأتى: إذا كانت $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة:

(١) $\overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{ص}$ = ...

(٢) $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع}$ = ...

(٣) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، -١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، -٤) فإن مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ تساوى ....

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهان غير صفريان وكان $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = ٠ فإن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يكونان ....

(٥) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهان غير صفريان وكان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{و}$ فإن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يكونان ....

(٦) قياس الزاوية بين المتجهين ٣$\overrightarrow{س}$ - $\overrightarrow{ص}$ ، -٤$\overrightarrow{س}$ + ٦$\overrightarrow{ص}$ يساوى ....

(٧) الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٣$\overrightarrow{س}$ + ٧$\overrightarrow{ع}$ لتحريك جسيم من نقطة أ(١ ، ١ ، ٢) إلى نقطة ب(٧ ، ٣ ، ٥) يساوى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٨) $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{و}$ (ب) ٠ (ج) ١ (د) $\overrightarrow{ع}$

(٩) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة متعامدين فإن ($\overrightarrow{أ}$ - ٢$\overrightarrow{ب}$) • (٣$\overrightarrow{أ}$ + ٥$\overrightarrow{ب}$) =

(أ) -٨ (ب) -٧ (ج) ٢٤ (د) ٠

(١٠) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة فإن $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ ∋ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]-١ ، ١[(ج) [-١ ، ١] (د) ح+

(١١) قياس الزاوية بين المتجهين (٢ ، -٢ ، ٢) ، (١ ، ١ ، ٤) يساوى ....

(أ) ٥٧,٠٢° (ب) ٣٥,٢٦° (ج) ١٣٤,٣٧° (د) ٠°

(١٢) إذا كان المتجهان (٢ ، ك ، -٣) ، (٤ ، ٦ ، -٦) متوازيين فإن ك = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (ج) -٣ (د) ١

أجب عما يأتى:

(١٣) أوجد $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ فى كل من الحالات الآتية:

(أ) $\overrightarrow{أ}$ = (٥ ، ١ ، -٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، -٤ ، ٣)

(ب) $\overrightarrow{أ}$ = -٣$\overrightarrow{س}$ - ٢$\overrightarrow{ص}$ - $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٦$\overrightarrow{س}$ + ٤$\overrightarrow{ص}$ + ٢$\overrightarrow{ع}$

(ج) $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٢$\overrightarrow{ص}$ - $\overrightarrow{ع}$

(١٤) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين فى كل من الحالات الآتية:

(أ) (٥ ، ١، -٢) ، (١ ، ١، -١)　　(ب) (٧، ٢ ، -١٠) ، (٢ ، ٦، ٤)

(جـ) (٢ ، ١ ، ٤) ، (١، -٢، ٠)

(١٥) أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ فى كل من الحالات الآتية:

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-٢ ، ٣ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ٣ ، -٤)

(ب) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = -$\overrightarrow{\text{س}}$ - ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$ - ٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$

(جـ) || $\overrightarrow{\text{أ}}$ || = ٦ ، || $\overrightarrow{\text{ب}}$ ||= ٨ وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

(١٦) ا ب جـ ى مربع طول ضلعه ١٢سم. $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودى على مستواه. أوجد:

(أ) $\overrightarrow{\text{أب}}$ • $\overrightarrow{\text{أجـ}}$　　(ب) $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{جـأ}}$　　(جـ) $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ • $\overrightarrow{\text{أى}}$

(د) $\overrightarrow{\text{بى}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}}$　　(هـ) $\overrightarrow{\text{أب}}$ • $\overrightarrow{\text{بجـ}}$　　(و) $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{بجـ}}$

(١٧) أوجد متجه وحدة عموديًّا على المستوى الذى يحوى المتجهين.

$\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢$\overrightarrow{\text{س}}$ - ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = -$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$ -٣ $\overrightarrow{\text{ع}}$

(١٨) احسب مساحة المثلث ى هـ و فى كل مما يأتى:

(أ) ى(٥ ، ١ ، -٢) ، هـ (٤ ، -٤ ، ٣) ، و (٢ ، ٤ ، ٠)

(ب) ى (٤ ، ٠ ، ٢) ، هـ (٢ ، ١ ، ٥) ، و (-١ ، ٠ ، -١)

(١٩) احسب مساحة متوازى الأضلاع ل م ن هـ فى كل مما يأتى:

(أ) ل (١ ، ١) ، م (٢ ، ٣) ، ن(٥ ، ٤)　　(ب) ل (٢ ، ١ ، ٣) ، م (١ ، ٤ ، ٥) ، ن(٢ ، ٥ ، ٣)

(٢٠) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة فى فى ما يلى:

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ١ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ١ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٥ ، ١ ، -٢)

(٢١) فى كل مما يأتى بين ما إذا كان المتجهان متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك:

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٠ ، ٢ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ٠ ، -٤)

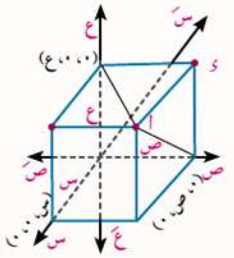
(ب) $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = ١٠$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٤٠$\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{و}}$ = -٣$\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٨ $\overrightarrow{\text{ع}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = -٢$\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٨$\overrightarrow{\text{س}}$ - ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٨ $\overrightarrow{\text{ع}}$

ملخص الوحدة

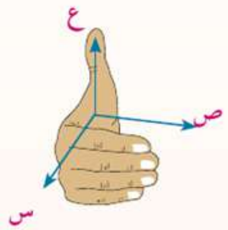
النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

تتعين إحداثيات النقطة أ فى الفراغ بمعرفة مسقطها على كل محور من محاور الإحداثيات.



قاعدة اليد اليمنى

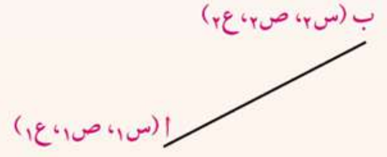
وفيها تشير الأصابع المنحنية من الاتجاه الموجب لمحور س إلى الاتجاه الموجب لمحور ص ويشير اتجاه الإبهام إلى الاتجاه الموجب لمحور ع



مستويات الإحداثيات

- المستوى الإحداثى س ص ومعادلته هى ع = ٠
- المستوى الإحداثى س ع ومعادلته هى ص = ٠
- المستوى الإحداثى ص ع ومعادلته هى س = ٠

البعد بين نقطتين



إذا كانت أ(س١، ص١، ع١) ، ب (س٢، ص٢، ع٢) نقطتين فى الفراغ؛ فإن طول القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ يعطى

$$\text{أ ب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2 + (\text{ع}_2 - \text{ع}_1)^2}$$

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت أ(س١، ص١، ع١) ، ب (س٢، ص٢، ع٢) نقطتين فى الفراغ، فإن إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ هى

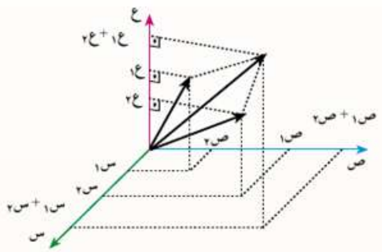
$$\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} ، \frac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2}\right)$$

معادلة الكرة فى الفراغ

- معادلة الكرة التى مركزها (ل، ك، و) وطول نصف قطرها نق تكون
  $(\text{س} - \text{ل})^2 + (\text{ص} - \text{ك})^2 + (\text{ع} - \text{و})^2 = \text{نق}^2$
- معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها نق تكون $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 = \text{نق}^2$
- معادلة الكرة : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 + 2\text{ل س} + 2\text{ك ص} + 2\text{ن ع} + \text{ى} = 0$ حيث مركزها (-ل ، -ك ، -ن) وطول

نصف قطرها (r_1) = $\sqrt{ل^2 + ك^2 + ن^2 - ى}$

(متجه الموضع فى الفراغ



إذا كانت أ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$) نقطة فى الفراغ فإن متجه الموضع للنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل يكون $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$)

- $أ_س$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور س
- $أ_ص$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور ص
- $أ_ع$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور ع

معيار المتجه

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$) فإن $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{أ_س^2 + أ_ص^2 + أ_ع^2}$

جمع وطرح المتجهات فى الفراغ

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$)

$\overrightarrow{ب}$ = ($ب_س$ ، $ب_ص$ ، $ب_ع$) فإن:

١- $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ = ($أ_س + ب_س$، $أ_ص + ب_ص$، $أ_ع + ب_ع$)

٢- $\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$ = ($أ_س - ب_س$، $أ_ص - ب_ص$، $أ_ع - ب_ع$)

خواص عملية الجمع

١- $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} \in ح^3$	خاصية الانغلاق
٢- $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ}$	خاصية الإبدال
٣- $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) + \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} + (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ})$	خاصية التجميع
٤- $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} = \overrightarrow{و} + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ}$	العنصر المحايد الجمعى
٥- $\overrightarrow{أ} + (-\overrightarrow{أ}) = (-\overrightarrow{أ}) + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$	المعكوس الجمعى

ضرب المتجه فى عدد حقيقى

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$) ، ك $\in$ ح فإن ك $\overrightarrow{أ}$ = (ك$أ_س$ ، ك$أ_ص$ ، ك$أ_ع$)

تساوى المتجهات فى الفراغ

إذا كان ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$) = ($\text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{ب}_{\text{ع}}$) فإن: $\text{أ}_{\text{س}} = \text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \text{ب}_{\text{ع}}$

متجه الوحدة

متجه الوحدة هو متجه معياره يساوى وحدة الأطوال

متجهات الوحدة الأساسية

$\overrightarrow{\text{س}}$ = (١ ، ٠ ، ٠) متجه وحدة فى الاتجاه الموجب لمحور س

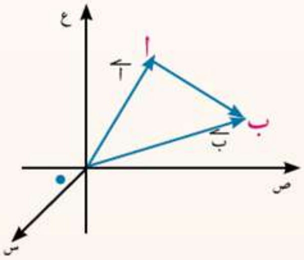
$\overrightarrow{\text{ص}}$ = (٠ ، ١ ، ٠) متجه وحدة فى الاتجاه الموجب لمحور ص

$\overrightarrow{\text{ع}}$ = (٠ ، ٠ ، ١) متجه وحدة فى الاتجاه الموجب لمحور ع

التعبير عن متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$) فإنه يمكن كتابة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ على الصورة $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{أ}_{\text{س}}\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\,\overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\,\overrightarrow{\text{ع}}$

التعبير عن قطعة مستقيمة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها



إذا كان أ ، ب نقطتين فى الفراغ متجه موضعهما $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ على الترتيب

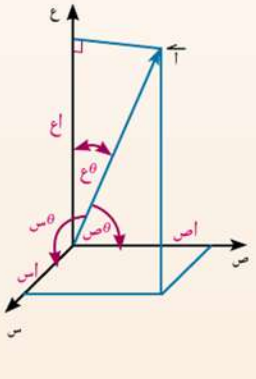
فإن $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

متجه الوحدة فى اتجاه متجه معلوم

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$) فإن المتجه $\overrightarrow{\text{ى}_{\text{أ}}}$ يسمى متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ويعطى بالقاعدة

$$\overrightarrow{\text{ى}_{\text{أ}}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$$

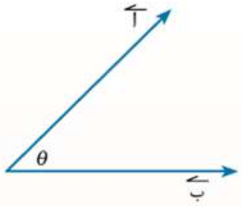
زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه المتجه فى الفراغ



إذا كانت ($\theta_{\text{س}}$ ، $\theta_{\text{ص}}$ ، $\theta_{\text{ع}}$) قياسات الزوايا التى يصنعها المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$)
مع الاتجاهات الموجبة لمحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن:

- $\text{أ}_{\text{س}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا $\theta_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا $\theta_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا $\theta_{\text{ع}}$
- ($\theta_{\text{س}}$ ، $\theta_{\text{ص}}$ ، $\theta_{\text{ع}}$) تسمى بزوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$
- جتا $\theta_{\text{س}}$ ، جتا $\theta_{\text{ص}}$ ، جتا $\theta_{\text{ع}}$ تسمى بجيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$
- جتا $\theta_{\text{س}}\,\overrightarrow{\text{س}}$ + جتا $\theta_{\text{ص}}\,\overrightarrow{\text{ص}}$ + جتا $\theta_{\text{ع}}\,\overrightarrow{\text{ع}}$ تمثل متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$
- ويكون جتا$^{٢}\theta_{\text{س}}$ + جتا$^{٢}\theta_{\text{ص}}$ + جتا$^{٢}\theta_{\text{ع}}$ = ١

الضرب القياسى لمتجهين



إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين فى ح^{3} قياس الزاوية بينهما θ حيث $0 \leqslant \theta \leqslant 180^\circ$ فإن

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جتا θ

خواص الضرب القياسى لمتجهين

١- $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$ **خاصية الإبدال**

٢- $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}) = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ}}$ **خاصية التوزيع**

٣- إذا كان ك عددًا حقيقيًّا فإن (ك $\overrightarrow{\text{أ}}$) $\cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot$ (ك $\overrightarrow{\text{ب}}$) = ك($\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$)

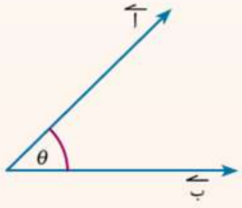
٤- $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{2}$

٥- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = 0$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

الضرب القياسى لمتجهين فى نظام إحداثى متعامد

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}} \text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}} \text{ب}_{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}} \text{ب}_{\text{ع}}$

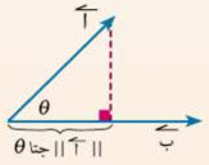
الزاوية بين متجهين



$$\text{جتا}\,\theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

- إذا كان جتا $\theta = 1$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} // \overrightarrow{\text{ب}}$ وفى نفس الاتجاه
- إذا كان جتا $\theta = -1$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} // \overrightarrow{\text{ب}}$ وفى عكس الاتجاه
- إذا كان جتا $\theta = 0$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

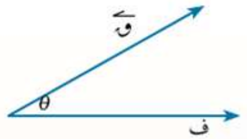
مركبة متجه فى اتجاه متجه اخر



مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ ويرمز لها بالرمز $\text{أ}_{\text{ب}}$

$$\text{أ}_{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \text{جتا}\,\theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

الشغل المبذول من قوة قَ لإحداث إزاحة ف

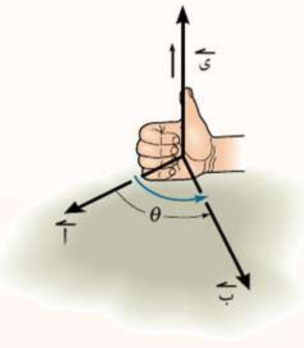


الشغل = قَ • فَ

= || قَ || || فَ || جتا θ

- إذا كانت القوة قَ فى نفس اتجاه الإزاحة (θ = صفر°) فإن شَ = || قَ || || فَ ||
- إذا كانت القوة قَ عكس اتجاه الإزاحة (θ = ١٨٠°) فإن شَ = - || قَ || || فَ ||
- إذا كانت القوة قَ عمودية على اتجاه الإزاحة (θ = ٩٠°) فإن شَ = ٠

الضرب الاتجاهى لمتجهين



إذا كان أَ ، بَ متجهين فى ح٣ قياس الزاوية الصغرى بينهما يساوى θ فإن أَ × بَ = (|| أَ || || بَ || جا θ) ىَ حيث ىَ متجه وحدة عمودى على مستوى أَ ، بَ ويتحدد اتجاه متجه الوحدة ىَ (لأعلى أم لأسفل) طبقًا لقاعدة اليد اليمنى حيث تشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلى اتجاه الدوران من أَ إلى بَ فيشير الإبهام إلى المتجه ىَ

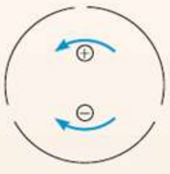
خواص الضرب الاتجاهى لمتجهين

١- أَ × بَ = - بَ × أَ

٢- أَ × أَ = وَ

٣- أَ × (بَ + جَ) = أَ × بَ + أَ × جَ خاصية التوزيع

٤- إذا كان أَ × بَ = وَ فإما أَ // بَ أحد المتجهين أو كليهما يساوى ىَ



٥- سَ × صَ = عَ ، صَ × عَ = سَ ، عَ × سَ = صَ

سَ × عَ = - صَ ، عَ × صَ = - سَ ، صَ × سَ = - عَ

الضرب الاتجاهى لمتجهين فى نظام إحداثى متعامد

إذا كان أَ = (أس ، أص ، أع) ، بَ = (بس ، بص ، بع) فإن

$$أَ × بَ = \begin{vmatrix} سَ & صَ & عَ \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$$

حالة خاصة: الضرب الاتجاهى فى مستوى الإحداثيات س ص

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص})$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_{س} ، ب_{ص})$ فإن:

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} أ_{س} & أ_{ص} \\ ب_{س} & ب_{ص} \end{vmatrix} \overrightarrow{ع} = (أ_{س} أ_{ص} - ب_{ص} ب_{س}) \overrightarrow{ع}$$

متجه الوحدة العمودى على مستوى المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

$$\overrightarrow{ى} = \frac{\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|}$$

توازى متجهين

المتجهان $\overrightarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$، $\overrightarrow{ب} = (ب_{س} ، ب_{ص} ، ب_{ع})$ يكونان متوازيين إذا تحقق أحد الشروط الآتية:

١- $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

٢- $\frac{أ_{س}}{ب_{س}} = \frac{أ_{ص}}{ب_{ص}} = \frac{أ_{ع}}{ب_{ع}}$

٣- $\overrightarrow{أ} = ك \overrightarrow{ب}$

إذا كانت ك > ٠ فإن المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان وفى نفس الاتجاه.

وإذا كانت ك < ٠ فإن المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان وفى عكس الاتجاه.

المعنى الهندسى للضرب الاتجاهى

$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|$ = مساحة متوازى الأضلاع فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران.

= ضعف مساحة المثلث فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان.

الضرب الثلاثى القياسى

$$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = \begin{vmatrix} أ_{س} & أ_{ص} & أ_{ع} \\ ب_{س} & ب_{ص} & ب_{ع} \\ جـ_{س} & جـ_{ص} & جـ_{ع} \end{vmatrix}$$

المعنى الهندسى للضرب الثلاثى القياسى

حجم متوازى السطوح الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$، $\overrightarrow{جـ}$ ثلاثة متجهات تمثل أحرف غير متوازية يساوى القيمة المطلقة للمقدار $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}$

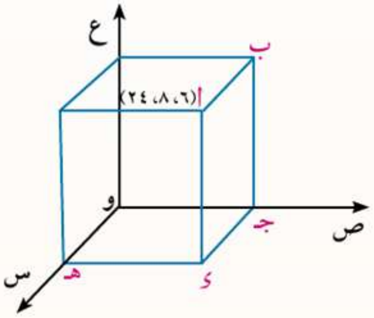
تمارين عامة

أكمل ما يأتى:

(١) النقطة (٢ ، ٠ ، -٣) تقع فى مستوى الإحداثيات .... الذى معادلته ....

(٢) الشكل المقابل يمثل متوازى مستطيلات:

أ (٦ ، ٨ ، ٢٤) . فإن



أ إحداثيات النقطة ى هى ....

ب إحداثيات النقطة جـ هى ....

جـ زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{وى}}$ هى ....

(٣) إذا كان أ(-١ ، ٢ ، ٣) ، ب(٤ ، -١ ، ٥) فإن $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ...

(٤) إذا كانت النقطة (-٢ ، ٤ ، م) تقع على الكرة (س + ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٢٥ فإن م = ...

(٥) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (ك، ٣، -٤) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (-٢ ، ٩ ، م) وكان $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$ فإن ك = ... ، م = ...

(٦) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ • $\overrightarrow{\text{ب}}$ = || $\overrightarrow{\text{أ}}$ × $\overrightarrow{\text{ب}}$ || فإن قياس الزاوية بين متجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يساوى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٧) المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{س س}'}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ع}'}$ يكونان مستوى الإحداثيات الذى معادلته ....

أ س = ٠ ب ص = ٠ جـ ع = ٠ د ص = ٢

(٨) معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣ ، -١، ٢) هى ....

أ س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٤ ب (س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ١٤

جـ (س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٢)^٢ = $\sqrt{١٤}$ د س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٤

(٩) إحداثيات نقطة منتصف القطعة $\overline{\text{ى هـ}}$ حيث ى(٢ ، ٣ ، ٣) ، هـ (٦ ، -١ ، -٤)

أ (٤ ، ٢ ، ٣$\frac{١}{٢}$) ب (٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$) جـ (٤ ، ١ ، -$\frac{١}{٢}$) د (٤ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$)

(١٠) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$ فإن|| $\overrightarrow{\text{أ}}$ × $\overrightarrow{\text{ب}}$ ||= ....

أ صفر ب ١ جـ || $\overrightarrow{\text{أ}}$ || د || $\overrightarrow{\text{ب}}$ ||

(١١) المتجه الذى يمثل متجه وحدة فى المتجهات الآتية:

أ (-٣ ، ٢ ، ٢) ب ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$) جـ ($\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-٤}{٥}$ ، ٠) د ($\frac{-١}{١٢}$ ، $\frac{-٣}{١٢}$ ، $\frac{٢}{١٢}$)

(١٢) إذا كان ك، هـ، و هى جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فإن:
(أ) ك + هـ + و = ١ (ب) ك = هـ = و (ج) $ك^2 + هـ^2 + و^2 = ١$ (د) ك + هـ + و = $\|\overrightarrow{أ}\|$

(١٣) إذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{جـ} = ٠$ فإن $\overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{جـ} =$ ....
(أ) ٠ (ب) ١ (ج) $\overrightarrow{أ}$ (د) $\|\overrightarrow{ب}\|$

(١٤) مستويا الإحداثيات س ص، ص ع يتقاطعان فى ....
(أ) نقطة الأصل (ب) محور س (ج) محور ص (د) محور ع

أجب عن ما يأتى:

(١٥) اثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط (٧ ، ١ ، ٣)، (٥ ، ٣ ، ٤)، (٣ ، ٥ ، ٣) هو مثلث متساوى الساقين.

(١٦) أوجد مركز وطول نصف قطر الكرة $س^2 + ص^2 + ع^2 = ٦ع$

(١٧) إذا كان أ (-٢ ، ٣، ٥)، ب (١ ، ٤ ، -٢) أوجد $\overrightarrow{أب}$

(١٨) إذا كان $\overrightarrow{جـ} = (١ ، -٢ ، ٢)$ فأوجد متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{جـ}$

(١٩) إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ}$ يصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات س، ص، ع زوايا قياساتها ٦٠° ، ٨٠° ، θ° حيث θ زاوية حادة
(أ) أوجد قيمة θ
(ب) اكتب الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ إذا علمت أن $\|\overrightarrow{أ}\| = ١٣$

(٢٠) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٦ ، ٢)$، $\overrightarrow{ب} = (ك ، ٣ ، م)$، $\overrightarrow{جـ} = (ك ، م ، ك + م)$ وكان $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ أوجد $\|\overrightarrow{جـ}\|$

(٢١) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة فى $ح^3$. تحت أى شرط يكون حاصل الضرب الاتجاهى $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ يمثل متجه وحدة فى $ح^3$. فسر إجابتك.

(٢٢) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٦سم، ب جـ = ٨سم أوجد
(أ) $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أجـ}$ (ب) $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{جـء}$ (ج) مركبة $\overrightarrow{جـء}$ فى اتجاه $\overrightarrow{بجـ}$

(٢٣) أوجد الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{ق} = (٢ ، -٣ ، ٥)$ لتحريك جسيم من نقطة (١ ، -١ ، ٠) إلى نقطة (٢ ، ٤ ، -٢)

(٢٤) أوجد الشغل المبذول من وزن جسم مقداره ٤٠ نيوتن يتحرك رأسيًّا لأعلى مسافة ١٠ أمتار فوق سطح الأرض

(٢٥) برهن كلًّا مما يأتى حيث $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\in ح^3$
(أ) $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|^2 + |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}|^2 = \|\overrightarrow{أ}\|^2 \|\overrightarrow{ب}\|^2$
(ب) إذا كان $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ٠$ ، $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ فإن إما $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

لمزيد من الأنشطه والتدريبات زيارة الموقع الالكترونى www.sec3mathematics.com.eg

اختبار تراكمى

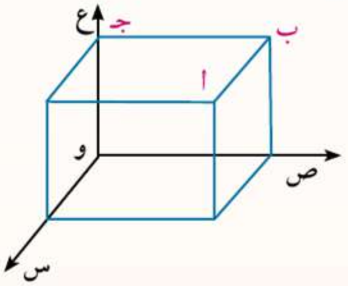
أكمل ما يأتى:

(١) بعد النقطة (-٤ ، -٣ ، ٢) عن مستوى الإحداثيات ص ع يساوى .... وحدة طول

(٢) إذا كانت النقطة (أ - ٢، ب + ٣ ، جـ - ٤) تقع فى المستوى الإحداثى س ع فإن ب = ...

(٣) إذا كانت أ (-١ ، ٠ ، -٢) ، ب (٥ ، -١ ، ٤) فإن إحداثيات منتصف $\overline{\text{أب}}$ هى ....

(٤) الشكل المقابل متوازى مستطيلات: أ (٥، ٨ ، ٤) فإن



(أ) إحداثيات النقطة ب هى ....

(ب) إحداثيات النقطة جـ هى ....

(٥) معادلة الكرة التى مركزها النقطة (١، -٣، -١) وتمر بالنقطة (-٢، -١، -١) هى ....

(٦) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-٢، ٣، ١)، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ٢، -٢)، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (١، -٣، ٥) فإن ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ...

(٧) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥، -٢ ، ٣) فإن متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}}$ يساوى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات:

(٨) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣، -٢، م) وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = $\sqrt{٢٢}$ فإن م = ...

(أ) ٢١ (ب) ± ٩ (جـ) ± ٣ (د) ١٧

(٩) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ - $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ - $\overrightarrow{\text{ص}}$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ • $\overrightarrow{\text{ب}}$ =

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ± ٣ (د) ٢

(١٠) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$ فإن مركبة $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه محور ص تساوى

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) -٣ (د) ٥

(١١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ٣ ، -١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ فإن مركبة $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ تساوى

(أ) ١٨ (ب) $\frac{١٨}{٥}$ (جـ) -$\frac{١٨}{٥}$ (د) $\frac{١٨}{٢٥}$

(١٢) متجه زوايا الاتجاه له ٤٥° ، ٤٥° ، θ فإن θ = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ٠° (د) ٦٠°

أجب عما يأتى:

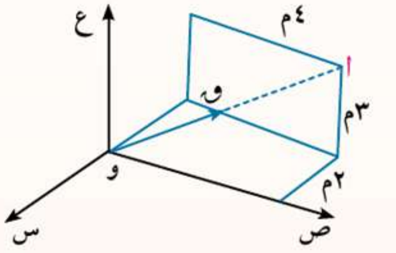
(١٣) أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقطة (٢ ، ٢ ، ١)، (٠ ، ٠ ، ٠)، (٢ ، -٤ ، ٤) هو مثلث قائم الزاوية، وأوجد مساحته.

(١٤) أوجد معادلة الكرة التى مركزها النقطة (٠ ، ٤، ٠) وتمس المستوى الإحداثى س ع

(١٥) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، -٣، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ٢ ، ٣) أوجد $\|\overrightarrow{أ}\|$ ، $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|$

(١٦) أوجد الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ الذى معياره $٢١\sqrt{٣}$ ويصنع زوايا متساوية القياس مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

(١٧) أوجد مركبات القوة $\overrightarrow{ق}$ التى مقدارها $١٢\sqrt{٢٩}$ نيوتن



(١٨) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ - ٢ $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ - ٢ $\overrightarrow{ص}$ + ٥ $\overrightarrow{ع}$ أوجد

أ) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ ب) $(٢\overrightarrow{أ}) \times (٣\overrightarrow{ب})$ ج) $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب})$

(١٩) تفكير إبداعى: إذا كان أ (٠ ، ٠، ١) ، ب (١ ، ٠ ، ٠)، جـ (٠ ، ١ ، ٠) أوجد متجه وحدة عمودى على المستوى أ ب جـ

(٢٠) أوجد قياسات الزوايا التى يصنعها المتجه $\overrightarrow{جـ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ - ٤ $\overrightarrow{ص}$ + ٥ $\overrightarrow{ع}$ مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

الوحدة الثانية

الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ

Straight Lines and planes in space

مقدمة الوحدة

درست فى الوحدة السابقة تحديد نقطة فى الفراغ، كذلك متجهات الموضع وكيفية إيجاد معيارها وهذه تعتبر من أساسيات هذه الوحدة حيث إنها تعتبر استكمالًا لما درس فى الوحدة السابقة ومكملًا لما درس فى العام السابق.

وفى هذه الوحدة سوف يدرس الطالب معادلة المستقيم فى الفراغ كذلك معادلة المستوى بصورها المختلفة، وقد تنوعت الأمثلة وطرق الحل تحقيقًا للأهداف المعرفية والمهارية التى تساعد الطالب على دراسة المعارف والمفاهيم الأخرى المرتبطة بهندسة الفراغ فى المراحل التعليمية التالية.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يوجد متجه اتجاه الخط المستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة البارامترية للمستقيم فى الفراغ والمعادلة الاتجاهية للمستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة الاحداثية للمستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة العامة للمستوى فى الفراغ.
- يوجد المعادلة القياسية للمستوى فى الفراغ.
- يتعرف الزاوية بين مستويين فى الفراغ.
- يستنتج شرط تعامد مستويين فى الفراغ.
- يستنتج شرط توازى مستويين فى الفراغ.
- يوجد معادلة خط تقاطع مستويين فى الفراغ.
- يعين المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطة ومستوى باستخدام حاصل الضرب القياسى وباستخدام الصورة الكارتيزية.
- يعين المسافة بين مستويين متوازيين.

مصطلحات أساسية

- متجه اتجاه — Direction vector
- زوايا اتجاه — Direction angles
- جيوب تمام الاتجاه — Direction cosines
- نسب الاتجاه — Direction ratios
- معادلة متجهة — Vector equation
- معادلات بارامترية — Parametric equations
- معادلة احداثية — Cartesian equation
- معادلة عامة — General equation
- يتناسب — Proportional
- مستقيمان متوازيان — Parallel straight Lines
- مستقيمان متعامدان — Perpendicular straight Lines
- مستقيمان متقاطعان — Intersecting straight Lines
- مستقيمان متخالفان — Skew straight Lines
- بعد عمودى — Perpendicular distance
- مستوى — plane
- صورة قياسية — Standard form
- مستويان متوازيان — Parallel planes
- مستويان متعامدان — Perpendicular planes
- مستويان متقاطعان — Interecting planes
- زاوية — Angle

الأدوات والوسائل

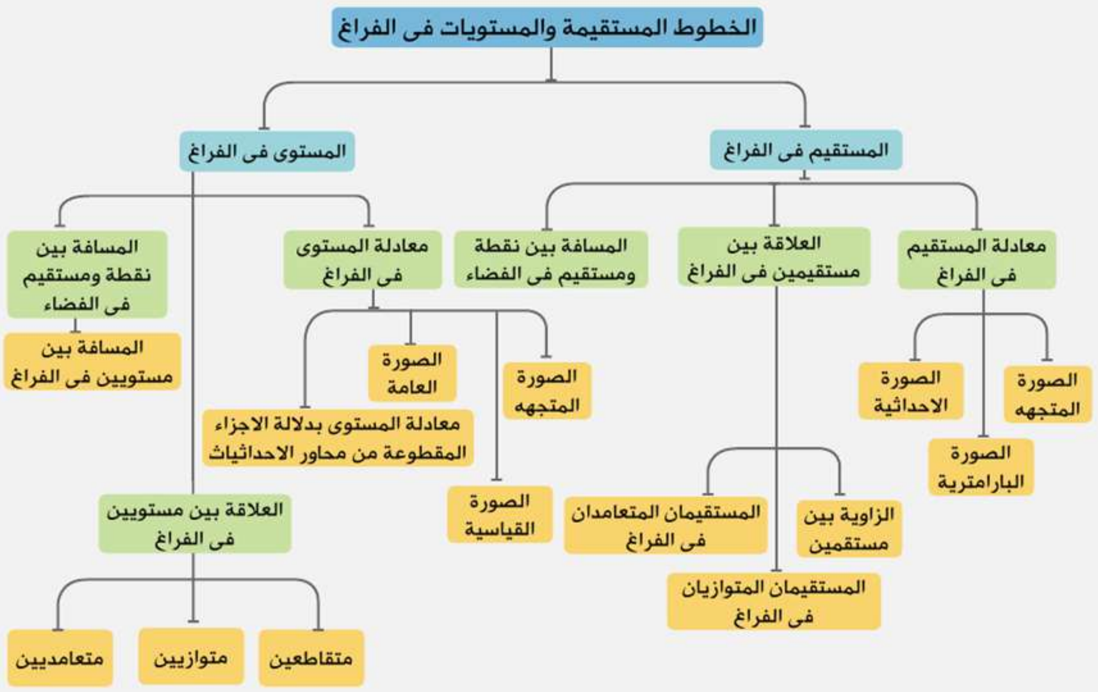
- آلة حاسبة بيانية.
- برامج رسومية ثلاثية الأبعاد.

دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): معادلة المستقيم فى الفراغ.

الدرس (٢ - ٢): معادلة المستوى فى الفراغ.

مخطط تنظيمى للوحدة



معادلة المستقيم فى الفراغ

Equation of a straight Line in space

تعلمت فى السنوات السابقة الخط المستقيم فى المستوى وكيفية إيجاد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم فى المستوى (الصورة المتجهة- الصورة البارامترية- الصورة العامة) وفى هذا الدرس نتعلم المستقيم فى الفراغ وكيفية إيجاد معادلة المستقيم فى الفراغ فى صورها المختلفة لما فى ذلك من أهمية كبيرة فى مجالات الهندسة والتصميم المعمارى وتطبيقات علوم الفضاء.

سوف تتعلم

- متجه اتجاه الخط المستقيم.
- الصورة المختلفة لمعادلة المستقيم.
- الزاوية بين مستقيمين.
- المسافة بين نقطة ومستقيم.
- المستقيمات المتوازية.
- المستقيمات المتعامدة.

مصطلحات أساسية

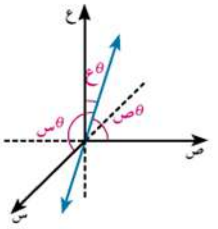
- متجه اتجاه *Direction vector*
- المعادلة البارامترية *Parametric equations*
- المعادلة الاحداثية *Cartesian equation*
- زوايا الاتجاه *Direction angles*
- نسب الاتجاه *Direction ratios*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسوم حاسوب ثلاثية الأبعاد.

تعلم

متجه اتجاه المستقيم فى الفراغ *Direction vector of a straight Line in space*



إذا كانت $\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$ هى زوايا اتجاه مستقيم فى الفراغ فإن جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع$ هى جيوب تمام الاتجاه لهذا المستقيم وعادة يرمز لها بالرمز ل ، م ، ن.

ل = جتا $\theta_س$ ، م = جتا $\theta_ص$ ، ن = جتا $\theta_ع$

ويكون ل^٢ + م^٢ + ن^٢ = ١

ويكون المتجه $\overrightarrow{ى}$ = ل $\overrightarrow{س}$ + م $\overrightarrow{ص}$ + ن $\overrightarrow{ع}$ هو متجه الوحدة فى اتجاه المستقيم.

ويكون أى متجه موازيًا لمتجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ يسمى متجه اتجاه المستقيم ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{هـ}$

أى أن $\overrightarrow{هـ}$ = ك (ل $\overrightarrow{س}$ + م $\overrightarrow{ص}$ + ن $\overrightarrow{ع}$) = (أ ، ب ، جـ)

حيث أ ، ب ، جـ تتناسب مع ل ، م ، ن ، ك $\in$ ع*

أ ، ب ، جـ تسمى نسب اتجاه المستقيم

فمثلًا: إذا كان ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$) هى جيوب تمام الاتجاه المستقيم.

فإن المتجه $\overrightarrow{هـ}$ = ك ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$) يمثل متجه اتجاه المستقيم حيث ك $\neq$ صفر

بوضع ك = ٣ ⟵ $\overrightarrow{هـ}$ = (٢، ١، ٢)

وبوضع ك = -٦ ⟵ $\overrightarrow{هـ}$ = (-٤، -٢، -٤)

أى أن الخط المستقيم له عدد لا نهائى من متجهات الاتجاه المتوازية، وكل منها يوازى هذا المستقيم.

مثال

(١) أوجد متجه الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين أ (-٢ ، ٣، ١) ، ب (٠ ، ٤ ، -٢)

الحل

متجه اتجاه المستقيم = $\overleftarrow{\text{أب}}$ = $\overleftarrow{\text{ب}}$ - $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٠ ، ٤ ، -٢) - (-٢ ، ٣ ، ١)

∴ $\overleftarrow{\text{هـ}}$ = (٢ ، ١ ، -٣)

حاول أن تحل

(١) أوجد متجه اتجاه كل من المستقيمات الآتية:

(أ) المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (-١ ، ٢ ، -٢)

(ب) المستقيم المار بالنقطتين جـ (٠ ، -٢ ، ٣) ، ى (١ ، ١ ، -١)

تفكير ناقد:

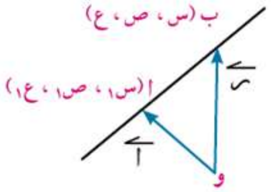
١- ماذا يمكن أن تقول عن المستقيم الذى متجه اتجاهه $\overleftarrow{\text{هـ}}$ = (أ ، ب ، صفر)

٢- أوجد متجه اتجاه لكل من محاور الإحداثيات.

تعلم

الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم فى الفراغ *Vector form of the equation of a straight Line in space*

إذا كان ل مستقيم فى الفراغ متجه اتجاهه $\overleftarrow{\text{هـ}}$ = (أ ، ب ، جـ) ويمر بالنقطة أ متجه موضعها $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) فإذا كانت النقطة ب أى نقطة على المستقيم متجه موضعها $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (س ، ص ، ع) فإن



من الشكل يكون: $\overleftarrow{\text{ر}}$ = $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أب}}$

ولكن $\overleftarrow{\text{أب}}$ // $\overleftarrow{\text{هـ}}$ ($\overleftarrow{\text{أب}}$ = ك $\overleftarrow{\text{هـ}}$)

∴ **$\overleftarrow{\text{ر}}$ = $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ك $\overleftarrow{\text{هـ}}$** ⟵ الصورة المتجهة لمعادلة الخط المستقيم.

مثال

(٢) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، -١، ٠) والمتجه (-٢، ٤ ، ٣) متجه اتجاه له.

الحل

(٣ ، -١ ، ٠) **تمثل نقطة على المستقيم** ∴ $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، -١ ، ٠)

(-٢ ، ٤ ، ٣) **يمثل متجه اتجاه المستقيم** ∴ $\overleftarrow{\text{هـ}}$ = (-٢ ، ٤ ، ٣)

معادلة المستقيم هى $\overleftarrow{\text{ر}}$ = $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ك $\overleftarrow{\text{هـ}}$

∴ $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٣ ، -١ ، ٠) + ك (-٢ ، ٤ ، ٣) ⟵ الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم.

ملحوظة: ك عدد حقيقى لا يعبر عن عدد ثابت وحيد بل يأخذ قيمًا حقيقية مختلفة، ويسمى فى هذه الحالة بارامتر. وعند كل قيمة للبارامتر ك يمكن إيجاد نقطة على المستقيم.

فمثلا عند ك = ١ فإن $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٣ ، ٣) تمثل متجه موضع نقطة على المستقيم .

وعند ك = ٢ فإن $\overrightarrow{ر}$ = (-١ ، ٧ ، ٦) تمثل متجه موضع نقطة أخرى على المستقيم.

حاول أن تحل

(٢) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، -٢ ، ٥) والمتجه (١ ، -٢ ، ٢) متجه اتجاه له. ثم أوجد نقطة أخرى على هذا المستقيم.

تعلم

المعادلات البارامترية للمستقيم فى الفراغ *Parametric equations of a straight Line in space*

من المعادلة المتجهة للمستقيم $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{أ}$ + ك $\overrightarrow{هـ}$

وبالتعويض عن $\overrightarrow{ر}$ = (س ، ص ، ع) ، $\overrightarrow{أ}$ = ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) ، $\overrightarrow{هـ}$ = (أ ، ب ، جـ)

فإن (س ، ص ، ع) = ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) + ك (أ ، ب، جـ)

∴ (س = $س_١$ + ك أ ، ص = $ص_١$ + ك ب ، ع = $ع_١$ + ك جـ) ⟵ المعادلات البارامترية للخط المستقيم

مثال

(٣) أوجد المعادلات البارامترية للخط المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٣) والمتجه (٤ ، -٢ ، ٥) متجه اتجاه له.

الحل

$\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، -١ ، ٣) + ك (٤ ، -٢ ، ٥) ⟵ الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم

∴ (س ، ص ، ع) = (٢ ، -١ ، ٣) + ك (٤ ، -٢ ، ٥)

∴ س = ٢ + ٤ك ، ص = -١ -٢ك ، ع = ٣ + ٥ ك

حاول أن تحل

(٣) أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بنقطة الأصل، والمتجه (-٢ ، ٣، ١) متجه اتجاه له.

تعلم

المعادلة الاحداثية للخط المستقيم *cartesian equation of a straight Line in space*

من المعادلات البارامترية للخط المستقيم

س = $س_١$ + ك أ، ص = $ص_١$ + ك ب، ع = $ع_١$ + ك جـ ∴ $\frac{س - س_١}{أ}$ = ك ، $\frac{ص - ص_١}{ب}$ = ك ، $\frac{ع - ع_١}{جـ}$ = ك

∴ $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$ ⟵ الصورة الاحداثية لمعادلة المستقيم

حيث كل من أ ، ب ، جـ لا يساوى الصفر

ملحوظة:

١- فى حالة أ = صفر مثلًا فإن الصورة الاحداثية للمستقيم تأخذ الصورة س = س١، $\frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$

٢- تعلمت فى السنوات السابقة أن معادلة المستقيم فى المستوى هي أ س + ب ص + جـ = ٠ و يظن البعض أن معادلة المستقيم فى الفراغ ستكون أ س + ب ص + جـ ع + ى = ٠ وهذا خطأ شائع حيث إن المعادلة الأخيرة تمثل معادلة مستوى فى الفراغ كما سيتضح ذلك فى الدروس الآتية.

٣- حيث إن نسب الاتجاه أ ، ب ، جـ تتناسب مع جيوب تمام الاتجاه ل ، م ، ن فإنه يمكن كتابة الصورة الاحداثية لمعادلة المستقيم على الصورة

$$\frac{س - س_١}{ل} = \frac{ص - ص_١}{م} = \frac{ع - ع_١}{ن}$$

مثال

(٤) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -١ ، ٥) ، (-٣ ، ١ ، ٤).

الحل

متجه اتجاه المستقيم $\overrightarrow{هـ}$ = (-٣ ، ١ ، ٤) - (٢ ، -١ ، ٥) = (-٥ ، ٢ ، -١)

∴ الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، -١ ، ٥) + ك (-٥ ، ٢ ، -١)

المعادلات البارامترية س = ٢ - ٥ك ، ص = -١ + ٢ك ، ع = ٥ - ك

الصورة الاحداثية $\frac{س - ٢}{-٥} = \frac{ص + ١}{٢} = \frac{ع - ٥}{-١}$

حاول أن تحل

(٤) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ٠) ، (-١ ، ٣ ، ٤)

مثال

(٥) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\frac{٣س + ١}{٢} = \frac{ص - ١}{٢} = \frac{٥ - ع}{٣}$

الحل

نفرض $\frac{٣س + ١}{٢} = \frac{ص - ١}{٢} = \frac{٥ - ع}{٣} = ك$

∴ $\frac{٣س + ١}{٢} = ك$ ومنها س = $\frac{-١}{٣} + \frac{٢}{٣}ك$

$\frac{ص - ١}{٢} = ك$ ومنها ص = ١ + ٢ك

$\frac{٥ - ع}{٣} = ك$ ومنها ع = ٥ - ٣ك

المعادلات البارامترية للخط المستقيم

ومن المعادلات البارامترية يمكن كتابة المعادلة

(س ، ص ، ع) = ($-\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٥) + ك ($\frac{٢}{٣}$ ، ٢ ، -٣)

أى $\overrightarrow{ر}$ = ($-\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٥) + ك ($\frac{٢}{٣}$ ، ٢ ، -٣) الصورة المتجهة

لاحظ أن: نسب اتجاه المستقيم هى ($\frac{٢}{٣}$ ، ٢ ، -٣) أو (٢ ، ٦ ، -٩)

حاول أن تحل

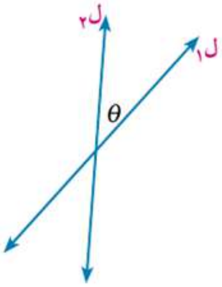
(٥) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\frac{\text{س} + ٤}{٣} = \frac{٢\text{ص} + ٥}{٢} = \frac{٤ - \text{ع}}{٤}$ ثم أوجد نقطة تقع على هذا المستقيم.

تعلم

الزاوية بين مستقيمين فى الفراغ *The angle netween two straight Lines in space*

إذا كان $\text{ل}_١$ ، $\text{ل}_٢$ مستقيمين فى الفراغ متجهى اتجاهيهما $\overleftarrow{\text{ه}_١} = (\text{أ}_١ ، \text{ب}_١ ، \text{جـ}_١)$ ، $\overleftarrow{\text{ه}_٢} = (\text{أ}_٢ ، \text{ب}_٢ ، \text{جـ}_٢)$ فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين $\text{ل}_١$، $\text{ل}_٢$ تعطى بالعلاقة

$$\text{جتا}\theta = \frac{|\overleftarrow{\text{ه}_١} \cdot \overleftarrow{\text{ه}_٢}|}{||\overleftarrow{\text{ه}_١}||\,||\overleftarrow{\text{ه}_٢}||}$$



و إذا كان $(\text{ل}_١ ، \text{م}_١ ، \text{ن}_١)$، $(\text{ل}_٢ ، \text{م}_٢ ، \text{ن}_٢)$ هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن:

$$\text{جتا}\theta = |\text{ل}_١\,\text{ل}_٢ + \text{م}_١\,\text{م}_٢ + \text{ن}_١\,\text{ن}_٢|$$

مثال

(٦) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftarrow{\text{ر}} = (٢ ، -١ ، ٣) + \text{ك}_١ (-٢ ، ٠ ، ٢)$، $\text{س} = ١$ ، $\frac{\text{ص} - ٤}{٣} = \frac{\text{ع} + ٥}{-٣}$

الحل

من معادلة المستقيم الأول $\overleftarrow{\text{ه}_١} = (-٢ ، ٠ ، ٢)$

من المعادلات البارامترية للمستقيم الثانى $\overleftarrow{\text{ه}_٢} = (٠ ، ٣ ، -٣)$

$$\therefore \text{جتا}\theta = \frac{|\overleftarrow{\text{ه}_١} \cdot \overleftarrow{\text{ه}_٢}|}{||\overleftarrow{\text{ه}_١}||\,||\overleftarrow{\text{ه}_٢}||} = \frac{|(-٢ ، ٠ ، ٢) \cdot (٠ ، ٣ ، -٣)|}{\sqrt{(-٢)^٢ + ٠^٢ + ٢^٢}\,\sqrt{٠^٢ + ٣^٢ + (-٣)^٢}}$$

$$= \frac{٦}{\sqrt{٨}\,\sqrt{١٨}} = \frac{١}{٢} \qquad \therefore \theta = ٦٠^\circ$$

حاول أن تحل

(٦) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

$\text{ل}_١ : \text{س} = ٢ - ٥\text{ك}$، $\text{ص} = ١ - \text{ك}$ ، $\text{ع} = ٣ + ٤\text{ك}$ ، $\text{ل}_٢ : \frac{\text{س} + ١}{٣} = \frac{٢ - \text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٢}$

مثال

(٧) أوجد قياس الزاوية بين مستقيمين الذين جيوب تمام اتجاههما هى

$$\left(\frac{٥}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{-١٢}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) ، \left(\frac{-٣}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$$

الحل

$(ل_1 ، م_1 ، ن_1) = \left(\frac{٥}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{-١٢}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ $\quad$ $(ل_2 ، م_2 ، ن_2) = \left(\frac{-٣}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

$\therefore$ جتا $\theta = |ل_1 ل_2 + م_1 م_2 + ن_1 ن_2|$

$= \left|\frac{٥}{١٣\sqrt{٢}} \times \frac{-٣}{٥\sqrt{٢}} + \frac{-١٢}{١٣\sqrt{٢}} \times \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}\right|$

$= \left|\frac{-١٥}{١٣٠} + \frac{-٤٨}{١٣٠} + \frac{١}{٢}\right| = \frac{١}{٦٥}$

$\therefore \theta =$ جتا$^{-1}\left(\frac{١}{٦٥}\right) = ٨٩° \; ٧' \; ٦''$

حاول أن تحل

(٧) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين جيوب تمام اتجاهها هى $\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{-٢}{٣} ، \frac{١}{٣}\right)$، $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}} ، ٠\right)$

تعلم

المستقيمان المتوازيان فى الفراغ *Parallel Lines in space*

إذا كان $\overrightarrow{هـ_1} = (أ_1 ، ب_1 ، جـ_1)$، $\overrightarrow{هـ_2} = (أ_2 ، ب_2 ، جـ_2)$ هما متجها اتجاه المستقيمين $ل_1$، $ل_2$ فإن $ل_1 // ل_2$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{هـ_1} // \overrightarrow{هـ_2}$ وهذا الشرط يمكن تحققه بعدة صور مختلفة

١- $\overrightarrow{هـ_1} = ك \, \overrightarrow{هـ_2}$ $\quad$ ٢- $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$ $\quad$ ٣- $\overrightarrow{هـ_1} \times \overrightarrow{هـ_2} = \overrightarrow{و}$

ملحوظة

١- إذا كان المستقيمان متوازيين وكانت نقطة على أحدهما تحقق الآخر فإن المستقيمين منطبقان.

٢- إذا كان $\overrightarrow{هـ_1}$ لا يوازى $\overrightarrow{هـ_2}$ فإن $ل_1$، $ل_2$ إما متقاطعان أو متخالفان.

مثال

(٨) أثبت أن المستقيمين $\overrightarrow{ر_1} = \overrightarrow{ص} + ك_1(\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع})$

$\overrightarrow{ر_2} = (\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}) + ك_2(-٢\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص})$

متقاطعان فى نقطة، وأوجد نقطة تقاطعهما.

الحل

$\overrightarrow{هـ_1} = (١ ، ٢ ، -١)$ ، $\overrightarrow{هـ_2} = (-٢ ، -٢ ، ٠)$

$\because \frac{أ_1}{أ_2} = \frac{١}{-٢} = -\frac{١}{٢}$ ، $\frac{ب_1}{ب_2} = \frac{٢}{-٢} = -١$ $\quad \therefore \frac{أ_1}{أ_2} \neq \frac{ب_1}{ب_2}$

$\therefore$ المستقيمان غير متوازيين لإثبات أن المستقيمين متقاطعان فى نقطة نبحث عن قيمة لـ $ك_1$، وقيمة لـ $ك_2$ تجعلان $\overrightarrow{ر_1} = \overrightarrow{ر_2}$

$\therefore \overrightarrow{ص} + ك_1(\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}) = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع} + ك_2(-٢\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص})$ بمساواة المعاملات

∴ $ك_1 = 1 - 2ك_2$ ومنها $ك_1 + 2ك_2 = 1$ (١)

$2ك_1 = -2ك_2$ ومنها $ك_1 + ك_2 = 0$ (٢)

$-ك_1 = 1$ ومنها $ك_1 = -1$ (٣)

بالتعويض من (٣) فى (١) $ك_2 = 1$

وهذه القيم تحقق المعادلة (٢)

∴ المستقيمان متقاطعان فى نقطة، ويكون متجه موضع نقطة تقاطعهما هو

$\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ص} - 1(\overrightarrow{س} + 2\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}) = -\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ أى $(-1 ، -1 ، 1)$

حاول أن تحل

(٨) أثبت أن المستقيمين $\overrightarrow{ر_1} = (3 ، -3 ، 5) + ك_1(0 ، -5 ، 5)$

$\overrightarrow{ر_2} = (-2 ، 3 ، 1) + ك_2(5 ، -1 ، -1)$

متعامدان ومتقاطعان فى نقطة، وأوجد إحداثيات نقطة تقاطعهما.

تعلم

المستقيمان المتعامدان فى الفراغ *Perpendicular Lines in space*

إذا كان $\overrightarrow{هـ_1} = (أ_1 ، ب_1، جـ_1)$ ، $\overrightarrow{هـ_2} = (أ_2، ب_2، جـ_2)$ هما متجها اتجاه المستقيمين $ل_1$،$ل_2$ فإن

$ل_1 \perp ل_2$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{هـ_1} \cdot \overrightarrow{هـ_2} = 0$

مثال

(٩) أثبت أن المستقيمين $\overrightarrow{ر_1} = (1 ، 2 ، 4) + ك_1(2 ، -1 ، 1)$ ، $\overrightarrow{ر_2} = (1 ، 1 ، 1) + ك_2(-2 ، 7 ، 11)$ متعامدان ثم بين أن المستقيمين متخالفان.

الحل

$\overrightarrow{هـ_1} = (2 ، -1 ، 1)$ ⟵ متجه اتجاه المستقيم الأول

$\overrightarrow{هـ_2} = (-2 ، 7 ، 11)$ ⟵ متجه اتجاه المستقيم الثانى

∴ $\overrightarrow{هـ_1} \cdot \overrightarrow{هـ_2} = (2 ، -1 ، 1) \cdot (-2 ، 7 ، 11)$

$= 2 \times (-2) + (-1) \times 7 + 1 \times 11$

$= -4 - 7 + 11$

= صفر ∴ المستقيمان متعامدان

لإثبات أن المستقيمين متخالفان نثبت أنه لا توجد أى قيم لـ $ك_1$، $ك_2$ تجعل $\overrightarrow{ر_1} = \overrightarrow{ر_2}$

أى $(1 ، 2 ، 4) + ك_1(2 ، -1 ، 1) = (1 ، 1 ، 1) + ك_2(-2 ، 7 ، 11)$ بمساواة المعاملات

∴ $1 + 2ك_1 = 1 - 2ك_2$ ومنها $ك_1 + ك_2 = 0$ (١)

$2 - ك_1 = 1 + 7ك_2$ ومنها $-ك_1 - 7ك_2 = -1$ (٢)

$4 + ك_1 = 1 + 11ك_2$ ومنها $ك_1 - 11ك_2 = -3$ (٣)

بحل المعادلتين ١ ، ٢ نحصل على $ك_١ = \frac{-١}{٦}$ ، $ك_٢ = \frac{١}{٦}$ وهذه القيم لا تحقق المعادلة الثالثة

∴ المستقيمان متخالفان

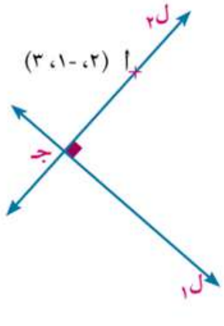
حاول أن تحل

(٩) أثبت أن المستقيمين $\overleftrightarrow{ر_١} = (٣ ، -١ ، ٢) + ك_١ (٤ ، ١ ، ٣)$، $\overleftrightarrow{ر_٢} = (٠ ، ٤ ، -١) + ك_٢ (١ ، -١ ، ٢)$ متخالفان.

مثال

(١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٣) و يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{ر_١} = (١ ، -١ ، ٢) + ك (٢ ، ٢ ، -١)$ على التعامد.

الحل



نفرض أن المستقيمين متقاطعان فى نقطة جـ

∵ جـ ∈ المستقيم $ل_١$ (المستقيم المعلوم)

∴ جـ يمكن كتابتها على الصورة

جـ (١ + ٢ك ، -١ + ٢ك ، ٢ - ك)

متجه اتجاه $ل_٢$ (المستقيم المطلوب) هو $\overrightarrow{هـ_٢} = \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ}$

∴ $\overrightarrow{هـ_٢} = (٢ك - ١ ، ٢ك ، -ك - ١)$

∵ $\overrightarrow{هـ_١} = (٢ ، ٢ ، -١)$

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $\overrightarrow{هـ_١} \cdot \overrightarrow{هـ_٢} = ٠$

∴ $(٢ ، ٢ ، -١) \cdot (٢ك - ١ ، ٢ك ، -ك - ١) = ٠$

∴ ٤ك - ٢ + ٤ك + ك + ١ = ٠

∴ ٩ك = ١ ومنها $ك = \frac{١}{٩}$

∴ $\overrightarrow{هـ_٢} = (\frac{-٧}{٩} ، \frac{٢}{٩} ، \frac{-١٠}{٩}) = (-٧ ، ٢ ، -١٠)$

∴ معادلة $ل_٢$ هى $\overrightarrow{ر} = (٢ ، -١ ، ٣) + ك_٢ (-٧ ، ٢ ، -١٠)$

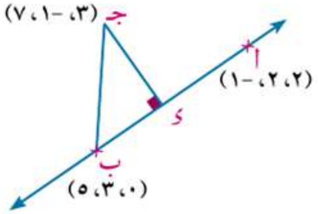
حاول أن تحل

(١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و يقطع المستقيم $\overrightarrow{ر} = (٣ ، ١ ، ٤) + ك (٢ ، ١ ، ٣)$ على التعامد

مثال (المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ)

(١١) أوجد البعد العمودى من النقطة (٣ ، -١ ، ٧) للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٢ ، -١)، (٠ ، ٣ ، ٥)

الحل



بفرض أ (٢ ، ٢ ، -١)، ب (٠ ، ٣ ، ٥)، جـ (٣ ، -١ ، ٧)

$\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب} = (٣ ، -١ ، ٧) - (٠ ، ٣ ، ٥) = (٣ ، -٤ ، ٢)$

متجه اتجاه المستقيم $\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{بأ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$

∴ $\overrightarrow{هـ} = (٢ ، -١ ، -٦)$

ب ى هى مقياس مسقط $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ على المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\dfrac{|\overrightarrow{\text{ب جـ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب أ}}|}{\|\overrightarrow{\text{ب أ}}\|}$

∴ ب ى = $\dfrac{|(٣، -٤، ٢) \cdot (٢، -١، -٦)|}{\sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + (-٦)^٢}}$ = $\dfrac{٢}{\sqrt{٤١}}$

لكن $\|\overrightarrow{\text{ب جـ}}\|$ = $\sqrt{٣^٢ + (-٤)^٢ + ٢^٢}$ = $\sqrt{٢٩}$

∴ البعد العمودى جـ ى = $\sqrt{(\text{ب جـ})^٢ - (\text{ب ى})^٢}$ = $\sqrt{٢٩ - \dfrac{٤}{٤١}}$ = $\sqrt{\dfrac{١١٨٥}{٤١}}$ ≃ ٥,٣ وحدة طول

حاول أن تحل

(١١) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ١ ، -٤) على المستقيم $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١، -١، ٢) + ك (٢ ، ٣ ، -٢)

تفكير ناقد: هل يمكنك اثبات الصيغة التالية التى تعين بعد النقطة ب عن المستقيم $\overrightarrow{\text{ر}}$ = $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ك $\overrightarrow{\text{ب}}$ البعد العمودى = $\dfrac{\|\overrightarrow{\text{أ ب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|}$

تمارين (٢ - ١)

أكمل:

(١) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٣) والمتجه (-١ ، ٤ ، ٢) متجه اتجاه له هى ....

(٢) قياس الزاوية بين المستقيمين ٢س = ٣ص = -ع ، ٦س = -ص = -٤ع يساوى ....

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين نسب اتجاههما هى (١، ١، ٢)، ($\sqrt{٣}$ -١، -$\sqrt{٣}$ -١، ٤) يساوى ....

(٤) إذا كانت θع هى الزاوية التى يصنعها المستقيم المار بالنقطة (٣، -١ ، ١) ونقطة الأصل والاتجاه الموجب لمحور ع فإن جتاθع = ...

(٥) متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين (٧ ، -٥ ، ٤)، (٥ ، -٣ ، ٣) هو ....

اجب عن الاسئلة الآتية:

(٦) أوجد جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذى نسب اتجاهه

أ) -١ ، ٢ ، ٣ ب) ١ ، ١ ، ١

(٧) أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستقيم.

أ) المار بالنقطة (٤ ، -٢ ، ٥) والمتجه $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (٢ ، ١ ، -١) متجه اتجاه له.

ب) المار بالنقطة (٣ ، -١ ، ٥) ويوازى المتجه $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ حيث $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = (٤ ، -٢ ، ٢)

جـ) المار بالنقطتين (٣ ، -٢ ، ٠)، (٠ ، ٤ ، ١)

د) المار بالنقطة (٣ ، ٢ ، ٥) ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية.

(٨) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم س - ٣ = $\frac{ص + ٢}{٤}$ = $\frac{٢ - ع}{٣}$

(٩) إذا كان $\overrightarrow{وأ}$ = $\overrightarrow{س}$ - ٢ $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{وب}$ = - $\overrightarrow{س}$ - ٣ $\overrightarrow{ع}$ ،
$\overrightarrow{وجـ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ - ٢ $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{وء}$ = ٨ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ + ٤ $\overrightarrow{ع}$.

أوجد المعادلة المتجهة لكل من المستقيمات

(أ) المار بالنقطتين أ، ب (ب) المار بالنقطة ء موازيًا $\overleftrightarrow{ب جـ}$

(جـ) المار بالنقطة جـ يقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ على التعامد

(١٠) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

(أ) $ل_١$: يمر بالنقتطين (-٣ ، ٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥ ، -٢)
$ل_٢$: يمر بالنقطتين (١ ، -٢ ، ٢) ، (٤ ، ٢ ، ٣)

(ب) $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، -١ ، ٣) + $ك_١$ (-١ ، ٤ ، ٢)
$ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢ ، -١) + $ك_٢$ (١ ، ١ ، ٣)

(جـ) $ل_١$: ٢س = ٣ص = ٤ع
$ل_٢$: $\frac{س - ١}{٣}$ = $\frac{ص + ٢}{-٢}$ = $\frac{ع}{-٥}$

(١١) اذكر الشرط (أو الشروط) اللازم لكى يكون المستقيمان

$ل_١$: س = $س_١$ + $أ_١ ك_١$ ، ص = $ص_١$ + $ب_١ ك_١$ ، ع = $ع_١$ + $جـ_١ ك_١$

$ل_٢$: س = $س_٢$ + $أ_٢ ك_٢$ ، ص = $ص_٢$ + $ب_٢ ك_٢$ ، ع = $ع_٢$ + $جـ_٢ ك_٢$

(أ) متوازيان (ب) متعامدان (جـ) متقاطعان فى نقطة

(١٢) أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة أ (١ ، -١ ، ٠) و يوازى المستقيم المار بالنقطتين ب (-٣ ، ٢ ، ١)، جـ (٢ ، ١ ، ٠) ثم بين أن النقطة ء (-١٤ ، ٢ ، ٣) تقع على المستقيم.

(١٣) أوجد قيمة ن التى تجعل المستقيمين $ل_١$: $\overrightarrow{ر_١}$ = (٣ ، -١ ، ن) + $ك_١$ (٤ ، ١ ، ٣)
$ل_٢$: س = $\frac{ص - ٤}{-١}$ = $\frac{ع + ١}{٢}$ متقاطعان فى نقطة، وأوجد نقطة تقاطعهما

(١٤) اكتشف الخطأ:

(أ) مجموع مربعات نسب الاتجاه لأى مستقيم يساوى ١

(ب) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$ ، $ع_٢$) هى
($س_٢$ - $س_١$ ، $ص_٢$ - $ص_١$ ، $ع_٢$ - $ع_١$)

(جـ) إذا كان ($أ_١$ ، $ب_١$، $جـ_١$) ، ($أ_٢$ ، $ب_٢$ ، $جـ_٢$) هى نسب الاتجاه للمستقيمين $ل_١$، $ل_٢$ فإن قياس الزاوية بينهما تعطى بالعلاقة جتاθ = $|أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + جـ_١ جـ_٢|$

الوحدة الثانية

٢ - ٢ معادلة المستوى فى الفراغ

The equation of a plane in space

سوف تتعلم
- المعادلة المتجهه للمستوى فى الفراغ.
- المعادلة القياسية للمستوى فى الفراغ.
- المعادلة العامة للمستوى فى الفراغ.
- الزاوية بين مستويين.
- شرط توازى مستويين.
- شرط تعامد مستويين.
- معادلة خط تقاطع مستويين فى الفراغ.
- المسافة بين نقطة ومستوى.
- المسافة بين مستويين متوازيين.

مصطلحات أساسية
- مستوى *plane*
- صورة قياسية *Standard form*
- مستويان متوازيان *Parallel planes*
- مستويان متعامدان *Perpendicular planes*
- مستويان متقاطعان *Interecting planes*
- زاوية *Angle*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسوم حاسوب ثلاثية الأبعاد.

فكر و ناقش

١- إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين متعامدين فإن $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} =$ ....

٢- متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين (س١، ص١، ع١)، (س٢، ص٢، ع٢) هو ....

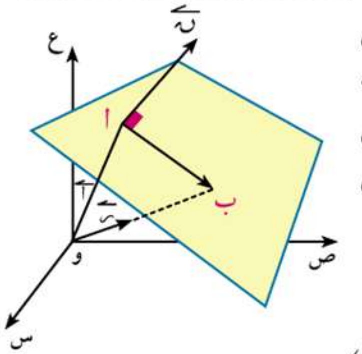
٣- الإحداثى ع لجميع النقط التى تقع فى المستوى الإحداثى س ص يساوى ....

تعلم

الصورة المتجهة لمعادلة المستوى فى الفراغ

Vector form of the equation of a plane in space

إذا كانت النقطة أ (س١، ص١، ع١) تقع على المستوى متجه موضعها $\overrightarrow{أ}$ ، وكان المتجه $\overrightarrow{ن}$ = (أ، ب، جـ) متجه اتجاه عمودى على المستوى وكانت ب (س، ص، ع) أى نقطة على المستوى متجه موضعها $\overrightarrow{ر}$ فإن:



$\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أب} =$ صفر

$\therefore \overrightarrow{ن} \cdot (\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}) = ٠$ $\qquad (\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ر})$

$\therefore \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$ ⟵ **الصورة المتجهة لمعادلة المستوى.**

أى أن: لإيجاد المعادلة المتجهة للمستوى يجب معرفة نقطة على المستوى ومتجه الاتجاه العمودى على المستوى.

مثال

(١) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٠ ، ١، ١) والمتجه $\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ عمودى على المستوى.

الحل

المعادلة المتجه $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$ حيث $\overrightarrow{أ} = (٠ ، ١ ، ١)$

$\therefore (١ ، ١ ، ١) \cdot \overrightarrow{ر} = (١ ، ١ ، ١) \cdot (٠ ، ١ ، ١)$

$(١ ، ١ ، ١) \cdot \overrightarrow{ر} = ٢$

حاول أن تحل

(١) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، -٣ ، ١) والمتجه $\overrightarrow{ن} = (١ ، -٢ ، ٣)$ عمودى على المستوى.

تعلم

الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة المستوى فى الفراغ

Standard form and general form of the equation of a plane in space

من الصورة المتجهة لمعادلة المستوى

$\overrightarrow{ن} \cdot (\overrightarrow{ر} - \overrightarrow{أ}) =$ صفر

حيث $\overrightarrow{ن} = (أ ، ب ، جـ)$، $\overrightarrow{ر} = (س ، ص ، ع)$، $\overrightarrow{أ} = (س_١ ، ص_١ ، ع_١)$

$\therefore (أ ، ب ، جـ) \cdot (س - س_١ ، ص - ص_١ ، ع - ع_١) =$ صفر

$\therefore أ(س - س_١) + ب(ص - ص_١) + جـ(ع - ع_١) = ٠$ ⟵ الصورة القياسية لمعادلة المستوى

وبفك الأقواس

$\therefore أس + ب ص + جـ ع + (-أس_١ - ب ص_١ - جـ ع_١) = ٠$

وبفرض $-أس_١ - ب ص_١ - جـ ع_١ = ء$ فإن

$أ س + ب ص + جـ ع + ء = ٠$ ⟵ الصورة العامة لمعادلة المستوى

مثال

(٢) أوجد الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٣ ، -٥ ، ٢) والمتجه $\overrightarrow{ن} = (٢ ، ١ ، ١)$ عمودى على المستوى.

الحل

الصورة القياسية $أ(س - س_١) + ب(ص - ص_١) + جـ(ع - ع_١) = ٠$

$\therefore ٢(س - ٣) + (ص + ٥) + (ع - ٢) = ٠$ ⟵ الصورة القياسية

وبفك الأقواس وتجميع الحدود المتشابهة

$\therefore ٢س + ص + ع - ٣ = ٠$ ⟵ الصورة العامة

حاول أن تحل

(٢) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (-٣ ، ٤ ، ٢) والمتجه $\overrightarrow{ن} = (١ ، -١، ٣)$ عمودى على المستوى.

مثال (معادلة المستوى المار بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة)

(٣) أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط (٣ ، -١، ٠) ، (٢ ، ١ ، ٤) ، (٠ ، ٣ ، ٣).

الحل

أولًا يجب التأكد من أن النقط ليست على استقامة واحدة

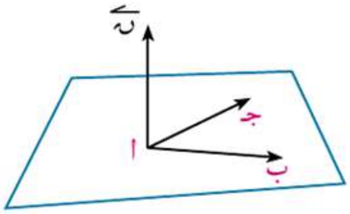
بفرض أ (٣ ، -١ ، ٠)، ب (٢ ، ١ ، ٤)، جـ (٠ ، ٣ ، ٣)

$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (-١، ٢، ٤)$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (-٣، ٤، ٣)$

$\because \frac{-١}{-٣} \neq \frac{١}{٢}$ $\therefore \overrightarrow{\text{أب}} \neq \overrightarrow{\text{أجـ}}$ $\therefore$ النقط ليست على استقامة واحدة

لإيجاد معادلة المستوى نحتاج متجه اتجاه العمودى على المستوى. وذلك بإيجاد الضرب الاتجاهى للمتجهين $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$.

$$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -١ & ٢ & ٤ \\ -٣ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = -١٠ \overrightarrow{س} - ٩ \overrightarrow{ص} + ٢ \overrightarrow{ع}$$



$\therefore$ **الصورة المتجهة لمعادلة المستوى**

$\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

$\therefore (-١٠ ، -٩ ، ٢) \cdot \overrightarrow{ر} = (-١٠ ، -٩ ، ٢) \cdot (٣ ، -١، ٠)$

$\therefore (-١٠ ، -٩ ، ٢) \cdot \overrightarrow{ر} = -٢١$

الصورة القياسية لمعادلة المستوى

أ (س - $س_١$) + ب (ص - $ص_١$) + جـ (ع - $ع_١$) = ٠

$\therefore$ -١٠ (س - ٣) - ٩ (ص + ١) + ٢ ع = ٠

الصورة العامة لمعادلة المستوى

(-١٠ ، -٩ ، ٢) $\cdot$ (س ، ص، ع) = -٢١ $\therefore$ -١٠س - ٩ص + ٢ ع + ٢١ = ٠

أضف إلى معلوماتك

معادلة المستوى المار بالثلاث نقط ($س_١$، $ص_١$، $ع_١$)، ($س_٢$، $ص_٢$، $ع_٢$)، ($س_٣$، $ص_٣$، $ع_٣$) هى:

$$\begin{vmatrix} س - س_١ & ص - ص_١ & ع - ع_١ \\ س_٢ - س_١ & ص_٢ - ص_١ & ع_٢ - ع_١ \\ س_٣ - س_١ & ص_٣ - ص_١ & ع_٣ - ع_١ \end{vmatrix} = ٠$$

حاول أن تحل

(٣) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط (١ ، ٠ ، ٠)، (٠ ، ٢، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٣).

مثال (مستوى يحوى مستقيمين)

(٤) أثبت أن المستقيمين $\overrightarrow{ر_١} = (٣\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}) + ك_١ (\overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص} + ٣ \overrightarrow{ع})$

$\overrightarrow{ر_٢} = (٢\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص}) + ك_٢ (\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع})$

متقاطعان، وأوجد معادلة المستوى الذى يحتويهما.

الحل

إذا تقاطع المستقيمان فإن $\vec{ر}_1 = \vec{ر}_2$

∴ $(٣\vec{س} + \vec{ص} - \vec{ع}) + ك_1(\vec{س} + ٢\vec{ص} + ٣\vec{ع}) = (٢\vec{س} + ٥\vec{ص}) + ك_2(\vec{س} - \vec{ص} + \vec{ع})$

بمساواة المعاملات نجد أن

٣ + ك$_1$ = ٢ + ك$_2$ ومنها ك$_1$ - ك$_2$ = -١ (١)

١ + ٢ك$_1$ = ٥ - ك$_2$ ومنها ٢ك$_1$ + ك$_2$ = ٤ (٢)

-١ + ٣ك$_1$ = ك$_2$ ومنها ٣ك$_1$ - ك$_2$ = ١ (٣)

بحل المعادلتين ١ ، ٢ ك$_1$ = ١ ، ك$_2$ = ٢

وبالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (٣) نجد أنها تحققها

∴ المستقيمان متقاطعان.

متجه الاتجاه العمودى على المستوى هو $\vec{ن}$ حيث

$$\vec{ن} = \vec{هـ}_1 \times \vec{هـ}_2 = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & -١ & ١ \end{vmatrix} = ٥\vec{س} + ٢\vec{ص} - ٣\vec{ع}$$

المعادلة المتجهة للمستوى $\vec{ن} \cdot \vec{ر} = \vec{ن} \cdot \vec{أ}$

∴ (٥ ، ٢ ، -٣) • $\vec{ر}$ = (٥ ، ٢ ، -٣) • (٣ ، ١ ، -١)

∴ (٥ ، ٢ ، -٣) • $\vec{ر}$ = ٢٠

الصورة العامة

(٥ ، ٢ ، -٣) • (س ، ص ، ع) = ٢٠

∴ ٥س + ٢ص - ٣ع = ٢٠

حاول أن تحل

(٤) أثبت أن المستقيمين ل$_1$: ٢س = ٣ص = ٤ ع، ل$_2$: ٣س = ٢ص = ٥ ع متقاطعان ثم أوجد معادلة المستوى الذى يحويهما .

مثال

(٥) أوجد نقطة تقاطع المستقيم ٢س = ٣ص - ١ = ع - ٤ مع المستوى ٣س + ص - ٢ع = ٥

الحل

من معادلة المستوى ص = ٥ + ٢ع - ٣س

بالتعويض فى معادلة المستقيم

٢س = ١٤ + ٦ع - ٩س = ع - ٤

١١س - ٦ع = ١٤ (١) -٥ع + ٩س = ١٨ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على

س = -٣٨ ، ع = -٧٢

بالتعويض فى معادلة المستوى $\therefore$ ص = - ٢٥

$\therefore$ نقطة التقاطع هى (-٣٨ ، -٢٥ ، -٧٢)

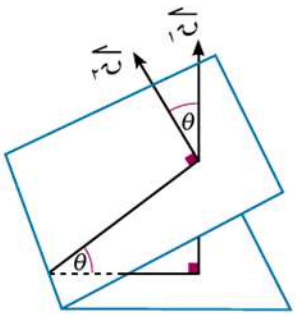
حاول أن تحل

(٥) أوجد نقطة تقاطع المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٤ ، ٢) + ك (٣ ، ٢ ، ٢) مع المستوى (٣ ، ٢ ، ٢) . $\overleftarrow{ر}$ = -٢

تعلم

الزاوية بين مستويين *the angle between two planes*

قياس الزاوية بين مستويين هو قياس الزاوية بين متجهى الاتجاه العمودين عليهما.
فإذا كان $\overleftarrow{ن_١}$ ، $\overleftarrow{ن_٢}$ هما المتجهين العمودين على المستويين فإن قياس الزاوية بين المستويين تعطى بالعلاقة



$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overleftarrow{ن_١} \bullet \overleftarrow{ن_٢}|}{\|\overleftarrow{ن_١}\|\,\|\overleftarrow{ن_٢}\|} \quad \text{حيث } ٠ \leqslant \theta \leqslant ٩٠^\circ$$

مثال

(٦) أوجد قياس الزاوية بين المستويين $ل_١$: (٢ ، -١ ، ٤) • $\overleftarrow{ر}$ = ٥ ، $ل_٢$: ٣س - ص + ٢ع = ٤

الحل

متجه الاتجاه العمودى على المستوى الأول $\overleftarrow{ن_١}$ = (٢ ، -١ ، ٤)

متجه الاتجاه العمودى على المستوى الثانى $\overleftarrow{ن_٢}$ = (٣ ، -١ ، ٢)

$\therefore$ قياس الزاوية بين المستويين هى θ حيث

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overleftarrow{ن_١} \bullet \overleftarrow{ن_٢}|}{\|\overleftarrow{ن_١}\|\,\|\overleftarrow{ن_٢}\|} = \frac{|(٢ ، -١ ، ٤)\bullet(٣ ، -١ ، ٢)|}{\sqrt{٢^٢+(-١)^٢+٤^٢}\ \sqrt{٣^٢+(-١)^٢+٢^٢}} = \frac{١٥}{٧\sqrt{٦}}$$

$$\therefore \theta = \text{جتا}^{-١}\left(\frac{١٥}{٧\sqrt{٦}}\right) = ٢٨^\circ\ ٥٨'$$

حاول أن تحل

(٦) أوجد قياس الزاوية بين المستويين س - ٣ص + ٢ع = ٠ ، ٢س + ص - ع = ٣

المستويان المتوازيان والمستويان المتعامدان *Parallel planes and perpendicular planes*

إذا كان $\overleftarrow{ن_١}$ ، $\overleftarrow{ن_٢}$ هما متجهى الاتجاه العموديين على المستويين فإن

١- المستويين متوازيان إذا كان $\overleftarrow{ن_١}$ // $\overleftarrow{ن_٢}$ أى إذا كان $\left(\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}\right)$

٢- المستويين متعامدان إذا كان $\overleftarrow{ن_١} \bullet \overleftarrow{ن_٢}$ = ٠ أى إذا كان $(أ_١أ_٢ + ب_١ب_٢ + جـ_١جـ_٢) = ٠$

مثال

٧ إذا كان المستوى ٢س - ص +ك ع = ٥ يوازى المستوى س + ل ص + ٤ ع = ١ فما قيمة كل من ك ، ل.

الحل

∵ المستويان متوازيان ∴ $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$

∴ $\frac{٢}{١} = \frac{-١}{ل} = \frac{ك}{٤}$ ∴ ل $= \frac{-١}{٢}$ ، ك = ٨

حاول أن تحل

٧ إذا كان المستوى س - ٣ص + ع = ٤ عمودى على المستوى أ س + ٢ص + ٣ ع = ٢ فما قيمة أ

مثال (معادلة خط تقاطع مستويين)

٨ أوجد معادلة خط تقاطع المستويين س + ٢ص - ٢ ع = ١ ، ٢ س + ص - ٣ ع = ٥

الحل

بحذف س من المعادلتين، وذلك بضرب المعادلة الأولى فى -٢ والجمع مع الثانية

∴ -٣ص + ع = ٣ ومنها ع = ٣ص + ٣ (١)

بحذف ص من المعادلتين، وذلك بضرب المعادلة الثانية فى -٢ والجمع

∴ -٣س + ٤ ع = -٩ ومنها ع $= \frac{٣س - ٩}{٤}$

∴ $\frac{٣س - ٩}{٤} = \frac{٣ص + ٣}{١} = \frac{ع}{١}$ **معادلة خط التقاطع**

حل آخر:

س + ٢ص - ٢ ع = ١ (١)

٢س + ص - ٣ ع = ٥ (٢)

بحذف س

-٣ص + ع = ٣ (٣)

بفرض ع = ك

(٣) ص $= \frac{ك - ٣}{٣}$ ، (٢) س $= \frac{٩ + ٤ك}{٣}$

∴ **المعادلات البارامترية لخط التقاطع هى**

س = ٣ + $\frac{٤}{٣}$ ك ، ص = -١ + $\frac{١}{٣}$ ك ، ع = ك

حل ثالث:

خط التقاطع عمودى على المتجهين $\overrightarrow{ن_١}$ ، $\overrightarrow{ن_٢}$ العمودين على المستويين.

∴ متجه اتجاه خط التقاطع $\overrightarrow{هـ}$ يمكن حسابه من الضرب الاتجاهى للمتجهين $\overrightarrow{ن_١}$ ، $\overrightarrow{ن_٢}$

$$\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٢ & -٢ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{vmatrix} = -٤ \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} - ٣ \overrightarrow{ع}$$

لإيجاد نقطة على خط التقاطع نضع   س = ١   (مثلًا)

بالتعويض معادلة المستوى الأول   ٢ص - ٢ع = صفر   (١)

بالتعويض معادلة المستوى الثانى   ص - ٣ع = ٣   (٢)

بحل المعادلتين (١)، (٢) نحصل على   ع = $-\frac{٣}{٢}$ ، ص = $-\frac{٣}{٢}$

∴ النقطة (١ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$) تقع على خط التقاطع.

معادلة خط التقاطع $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$) + ك (-٤ ، -١ ، -٣)

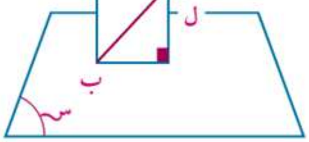
حاول أن تحل

(٨) أوجد معادلة خط تقاطع المستويين ٣س -ص + ٢ع = ٣ ، س - ٢ص + ٥ع = ٢

تعلم

طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى *the length of the perpendicular from a point to a plane*

إذا كانت أ ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) نقطة خارج المستوى سـ وكانت ب نقطة على المستوى ، $\overleftarrow{ن}$ متجه الاتجاه العمودى على المستوى فإن بعد النقطة أ عن المستوى يساوى طول مسقط $\overleftarrow{ب أ}$ على $\overleftarrow{ن}$



$$ل = \frac{|\overleftarrow{ب أ} \cdot \overleftarrow{ن}|}{||\overleftarrow{ن}||}$$

مثال

(٩) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، -١ ، ٣) على المستوى الذى معادلته $\overleftarrow{ر}$. (٢ ، ٢ ، -١) = ٥

الحل

يجب إيجاد نقطة على المستوى ومتجه اتجاه العمودى على المستوى من معادلة المستوى $\overleftarrow{ر}$. (٢ ، ٢ ، -١) =٥ نجد أن $\overleftarrow{ن}$ = (٢ ، ٢ ، -١)

ولإيجاد نقطة على المستوى نفرض أن المستوى يقطع محور ع فى النقطة (٠ ، ٠ ، ع)

∴ (٠ ، ٠ ، ع) • (٢ ، ٢ ، -١) = ٥   **ومنها**   ع = -٥

∴ النقطة ب (٠ ، ٠ ، -٥) تقع على المستوى

$\overleftarrow{ب أ}$ = $\overleftarrow{أ}$ - $\overleftarrow{ب}$ = (١ ، -١ ، ٨)   حيث أ (١ ، -١ ، ٣)

طول العمود (ل) = $\frac{|\overleftarrow{ب أ} \cdot \overleftarrow{ن}|}{||\overleftarrow{ن}||}$ = $\frac{|(١ ، -١ ، ٨) \cdot (٢ ، ٢ ، -١)|}{\sqrt{٢^٢ + ٢^٢ + (-١)^٢}}$ = $\frac{٨}{٣}$ وحدة

حاول أن تحل

(٩) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (-٢ ، ١ ، ٤) على المستوى الذى معادلته $\overrightarrow{ر}$. (١ ، -٣ ، ٢) = ٤

الصورة الإحداثية لطول العمود المرسوم من نقطة على مستوى

علمت أن طول العمود المرسوم من نقطة أ (س١ ، ص١ ، ع١) على المستوى المار بالنقطة ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ب ، جـ) عمودى على المستوى يعطى بالعلاقة

$$ل = \frac{|\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{ن}|}{||\overrightarrow{ن}||}$$

$$\therefore ل = \frac{|(س_1 - س_2 ، ص_1 - ص_2 ، ع_1 - ع_2) . (أ ، ب ، جـ)|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$$

$$= \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + (- أ س_2 - ب ص_2 - جـ ع_2)|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$$

$\because$ النقطة ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢) تقع على المستوى أ س + ب ص + جـ ع + ى = ٠

$\therefore$ - أ س٢ - ب ص٢ - جـ ع٢ = ى

$$\therefore ل = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + ى|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$$ ⟵ الصورة الإحداثية لطول العمود

مثال

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٥، -٤) على المستوى الذى معادلته ٣س - ص + ٢ ع = ٦

الحل

$$ل = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + ى|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$$

$$= \frac{|٣(١) - (٥) + ٢(-٤) - ٦|}{\sqrt{٣^2 + (-١)^2 + ٢^2}} = \frac{١٦}{\sqrt{١٤}}$$ وحدة طول

حاول أن تحل

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (-١ ، ٤ ، ٠) على المستوى الذى معادلته س - ٢ص - ع = ٤

مثال (المسافة بين مستويين متوازيين)

(١١) أثبت أن المستويين س + ٣ص - ٤ ع = ٣ ، ٢س + ٦ص - ٨ ع = ٤ متوازيان، وأوجد البعد بينهما.

الحل

لإثبات أن المستويين متوازيان نثبت أن متجهى الاتجاه العموديين عليهما متوازيان.

$\overrightarrow{ن_1}$ = (١ ، ٣ ، -٤) ، $\overrightarrow{ن_2}$ = (٢ ، ٦ ، -٨)

$\because \frac{أ_1}{أ_2} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{ب_1}{ب_2} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{جـ_1}{جـ_2} = \frac{-٤}{-٨} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$ $\therefore$ المستويان متوازيان

لإيجاد المسافة بينهما نوجد نقطة على إحداهما، ثم نوجد طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر.
لإيجاد نقطة على المستوى الأول نفرض س = ٠ ، ص = ٠

بالتعويض فى معادلة المستوى الأول ∴ ع = $\frac{-٣}{٤}$

∴ النقطة (٠ ، ٠ ، -٤) تقع على المستوى الأول

ويكون طول العمود المرسوم منها للمستوى الثانى هو ل حيث

ل = $\frac{|٢(٠) + ٦(٠) - ٨(-٤) - ٤|}{\sqrt{٢^٢ + ٦^٢ + (-٨)^٢}}$ = $\frac{١٤}{\sqrt{٢٦}}$ وحدة طول

حاول أن تحل

(١١) أثبت أن المستويين ٣س + ٦ص + ٦ع = ٤ ، س + ٢ص + ٢ع = ١ متوازيان، وأوجد البعد بينهما.

تعلم

معادلة المستوى باستخدام الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات فى النقط ($س_١$ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، $ص_١$ ، ٠) (٠ ، ٠ ، $ع_١$) فإن معادلة المستوى تكون على الصورة

$\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$ ⟵ معادلة المستوى بدلالة الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

استعن بمدرسك لإثبات الصورة السابقة لمعادلة المستوى.

مثال

(١٢) أوجد معادلة المستوى الذى يقطع من محاور الإحداثيات س ، ص ، ع الأجزاء ٢ ، -٣ ، ٥ على الترتيب.

الحل

معادلة المستوى هى $\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$

أى $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{-٣} + \frac{ع}{٥} = ١$

حاول أن تحل

(١٢) أوجد الأجزاء التى يقطعها المستوى ٢س + ٣ص - ع = ٦ من محاور الإحداثيات.

تفكير ناقد:

إذا قطع المستوى ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقط أ ، ب ، جـ على الترتيب.
احسب مساحة المثلث أ ب جـ

تمارين (٢ - ٢)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) أى من النقط تقع فى المستوى ٢ س + ٣ ص - ع = ٥

أ (١ ، ١ ، ١) ب (١ ، ٢ ، ٠) ج (٠ ، ٢ ، ١) د (٣ ، ٢ ، -١)

(٢) المستوى ٣س - ٢ص + ٤ ع = ١٢ يقطع من محور س جزء طوله

أ ٣ ب -٤ ج ٤ د ٦

(٣) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات بواسطة المستوى س + ٥ ص - ٦ ع = ٣٠ هى أ ، ب ، حـ فإن أ + ب + جـ =

أ صفر ب ٣٠ ج ٣١ د ٤١

(٤) معادلة المستوى المار بالنقط (١ ، ٢ ، ٣) و يوازى محورى الإحداثيات س ، ص هى

أ س + ص = ٣ ب ع = ٣ ج س = ١ د ص = ٢

(٥) معادلة المستوى المار بالنقط (٢ ، ٣ ، ٥) ، (-١ ، ٣ ، ١) ، (٤ ، ٣ ، -٢) هى

أ س + ص - ع = ٠ ب س = -١ ج ص = ٣ د ع = -٢

(٦) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، -٢ ، ٥) والمتجه (٢ ، ١ ، ٣) عمودى عليه هى

أ ٢س + ص + ٣ ع = ١ ب ٢س + ص + ٣ ع = ١٥

ج س - ٢ص + ٥ ع = ١٥ د س + ص + ع = ٤

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، -١ ، ٤) والمتجه ن = (٢ ، -٣ ، ٤) عمودى عليه ثم بين:

أ هل النقطة (٢ ، ٢ ، ١) تقع فى المستوى؟ ب هل المتجه ى = (٣ ، -٥ ، -٢) يوازى المستوى؟

(٨) أوجد ثلاث نقط فى الفراغ تقع على كل من المستويات الآتية:

أ س = ٣ ب ص = -٢ ج س + ٣ص = ٥ د ٢س - ص + ٣ ع = ٤

(٩) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستوى المار بنقطة الأصل والمتجه ن = س + ٢ ص - ٣ ع عمودى عليه.

(١٠) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٠) والمتجه ن = ٤ س + ١٠ ص - ٧ ع عمودى عليه.

(١١) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالثلاث نقط أ (٢ ، -١ ، ٠) ب (-١ ، ٣ ، ٤) ، جـ (٣ ، ٠ ، ٢)

(١٢) أثبت أن المستقيم ر = ع + ك (٢ س + ٣ ص + ٤ ع) عمودى على المستوى س + $\frac{٣}{٢}$ ص + ٢ ع = ٥

(١٣) أثبت أن النقطة أ (٢ ، ٣ ، ١) والمستقيم ل: ر = (٣ س + ص + ٣ ع) + ك (س - ٢ ص + ٢ ع) يقعان فى المستوى الذى معادلته ر . (٢ س - ع) = ٣

(١٤) أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (٢ ، ١ ، ٤) ويحقق كلًّا من الشروط الآتية:

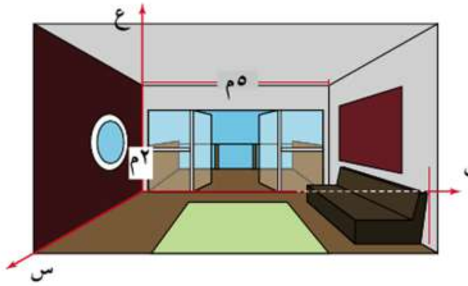
(أ) يوازى المستوى ٢س + ٣ص + ٥ع = ١

(ب) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ٥) ، (١ ، ٦ ، ٤)

(جـ) عمودى على كل من المستويين ٧ س + ص + ٢ ع = ٦ ، ٣س + ٥ص -٦ ع = ٨

(١٥) أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{ع}$ + ك (٢ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$) مع المستوى $\overrightarrow{ر}$ • $\overrightarrow{س}$ = ٤

(١٦) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى الذى يقطع من محاور الإحداثيات س ، ص ، ع الأجزاء ٢ ، ٤ ، ٥ على الترتيب.



(١٧) الربط بالبيئة: فى الشكل المقابل. أوجد معادلة كل من

(أ) مستوى أرضية الحجرة.

(ب) مستوى سقف الحجرة.

(جـ) مستويات الحوائط الجانبية.

(١٨) أوجد معادلة المستوى الذى يحتوى المستقيم ل$_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٣ ، -٥) + ك$_١$ (٦ ، -٢ ، -١) ويوازى المستقيم ل$_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٧ ، -٤) + ك$_٢$ (١ ، -٣ ، ٣)

(١٩) أوجد قياس الزاوية بين كل زوج من المستويات الآتية:

(أ) ل$_١$: ٢س - ص + ع = ٥ ، ل$_٢$: ٣س + ٢ص -٢ ع = ١

(ب) ل$_١$: $\overrightarrow{ر}$ • (٢ ، ١ ، -١) = ٤ ، ل$_٢$: $\overrightarrow{ر}$ • (٣ ، -٢ ، ٠) = ٧

(جـ) ل$_١$: ص = ٤ ، ل$_٢$: س - ٣ص + ٥ ع = ١

أسئلة متعددة المطالب

(٢٠) إذا كانت النقط أ ، ب ، جـ ، ى فى الفراغ متجهات موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هى
- $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$ ، ٢ $\overrightarrow{س}$ - $\overrightarrow{ص}$ + ٣ $\overrightarrow{ع}$ ، - $\overrightarrow{س}$ - ٢ $\overrightarrow{ص}$ + ٢ $\overrightarrow{ع}$ ، ٧ $\overrightarrow{س}$ - ٤ $\overrightarrow{ص}$ + ٢ $\overrightarrow{ع}$ على الترتيب

(أ) أوجد متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ

(ب) بين طول العمود المرسوم من ى على مستوى أ ب جـ يساوى ٢ $\sqrt{٦}$

(جـ) بين أن المستويين أ ب جـ ، ى ب جـ متعامدان.

(د) أوجد معادلة خط تقاطع المستويين أ ب حـ ، و ى ب

(٢١) إذا كان المستوى س يحوى النقط أ (١ ، ٤ ، ٢) ب (١ ، ٠ ، ٥)، جـ (٠ ، ٨ ، -١) وكان المستوى ص يحوى النقطة ى (٢ ، ٢ ، ٣) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ + ٢ $\overrightarrow{ع}$ عمودى عليه أوجد:

(أ) المعادلة الإحداثية للمستوى س (ب) المعادلة الإحداثية للمستوى ص

(جـ) إذا كانت النقطة (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كل من المستويين س ، ص فما قيمة كل من ط ، ف

(د) أوجد الصورة المتجهة لخط تقاطع المستويين س ، ص

(هـ) إذا كانت النقطة (١ ، ١، ق) على أبعاد متساوية من المستويين س ، ص أوجد قيم ق الممكنة.

ملخص الوحدة

متجه الاتجاه:

١- إذا كانت ل، م، ن هى جيوب تمام الاتجاه لمستقيم فإن المتجه $\overrightarrow{هـ}$ = ك (ل، م، ن) يمثل متجه اتجاه للمستقيم.
ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{هـ}$ = (أ، ب، جـ) وتسمى الأعداد (أ، ب، جـ) بنسب الاتجاه للمستقيم.

٢- متجه الاتجاه للمستقيم يأخذ عدة صور متكافئة **فمثلا** $\overrightarrow{هـ}$ = ٢ (ل، م، ن) = ٣(ل ، م، ن) = -٤ (ل، م، ن) ....

معادلة الخط المستقيم

- معادلة المستقيم المار بالنقطة ($س_١$، $ص_١$، $ع_١$) والمتجه $\overrightarrow{هـ}$ = (أ، ب، جـ) متجه اتجاه له هى الصورة المتجهة: $\overrightarrow{ر}$ = ($س_١$، $ص_١$، $ع_١$) + ك (أ، ب، جـ)
- **المعدلات البارمزية:** س = $س_١$ + ك أ ، ص = $ص_١$ + ك ب، ع = $ع_١$ + ك جـ
- **المعادلة الإحداثية:** $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$

الزاوية بين مستقيمين

إذا كان $\overrightarrow{هـ_١}$، $\overrightarrow{هـ_٢}$ متجهى اتجاه مستقيمين فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين هى:

$$جتا\,\theta = \frac{|\overrightarrow{هـ_١} \cdot \overrightarrow{هـ_٢}|}{||\overrightarrow{هـ_١}||\,||\overrightarrow{هـ_٢}||}$$

وإذا كان ($ل_١$، $م_١$، $ن_١$) ($ل_٢$، $م_٢$، $ن_٢$) هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن:

$$جتا\,\theta = |ل_١ ل_٢ + م_١ م_٢ + ن_١ ن_٢|$$

شرط توازى وشرط تعامد مستقيمين

إذا كان $\overrightarrow{هـ_١}$ = ($أ_١$، $ب_١$، $جـ_١$) $\overrightarrow{هـ_٢}$ = ($أ_٢$، $ب_٢$، $جـ_٢$) متجهى اتجاه مستقيمين فإن

- **المستقيمين متوازيان إذا كان**

$$\overrightarrow{هـ_١} = ك\,\overrightarrow{هـ_٢} \quad ، \quad أو \quad \overrightarrow{هـ_١} \times \overrightarrow{هـ_٢} = \overrightarrow{و} \quad ، \quad أو \quad \frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$$

- **المستقيمين متعامدان إذا كان**

$$أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + جـ_١ جـ_٢ = ٠$$

معادلة المستوى

معادلة المستوى المار بالنقطة (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = (أ، ب، جـ) عموديًّا على المستوى.

- **الصورة المتجهة:** $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot$ (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$)
- **الصورة القياسية:** أ(س - س$_1$) + ب (ص - ص$_1$) + جـ (ع - ع$_1$) = ٠
- **الصورة العامة :** أس + ب ص + جـ ع + ى = ٠

الزاوية بين مستويين

- إذا كان $\overrightarrow{ن_1}$ = (أ$_1$، ب$_1$، جـ$_1$)، $\overrightarrow{ن_2}$ = (أ$_2$، ب$_2$، جـ$_2$) متجهى العمودين على المستويين فإن قياس الزاوية بين المستويين تعطى بالعلاقة

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{ن_1} \cdot \overrightarrow{ن_2}|}{\|\overrightarrow{ن_1}\|\,\|\overrightarrow{ن_2}\|} \qquad \text{حيث } ٠ \leqslant \theta \leqslant ٩٠^\circ$$

المستويان المتوازيان والمستويان المتعامدان

- إذا كان $\overrightarrow{ن_1}$ ، $\overrightarrow{ن_2}$ = هما المتجهان العمودان على المستويين فإن شرط توازى المستويين هو

$$\overrightarrow{ن_1} \,/\!/\, \overrightarrow{ن_2} \quad \text{أو} \quad \frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$$

- وشرط تعامد المستويين هو

$$\overrightarrow{ن_1} \cdot \overrightarrow{ن_2} = ٠ \quad \text{أو} \quad أ_1 أ_2 + ب_1 ب_2 + جـ_1 جـ_2 = ٠$$

طول العمود المرسوم من نقطة على مستوى

- طول العمود المرسوم من النقطة أ(س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) على المستوى المار بالنقطة ب (س$_2$، ص$_2$، ع$_2$) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = (أ، ب، جـ) عمودى على المستوى.

$$ل = \frac{|\overrightarrow{بأ} \cdot \overrightarrow{ن}|}{\|\overrightarrow{ن}\|} \qquad \text{الصورة المتجهة}$$

أو

$$ل = \frac{|أس_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + ى|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}} \qquad \text{الصورة الإحداثية}$$

تمارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات:

(١) معادلة المستقيم المار بالنقطة أ(-١، ٠، ٢) والمتجه $\overleftarrow{هـ}$ = (١، -١، ٣) متجه اتجاه له هى

أ $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع - ١}{-١}$ ب $\frac{س + ١}{١} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع - ٢}{٣}$

ج $\frac{س - ١}{٣} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع}{١}$ د $\frac{س - ١}{١} = \frac{ص - ١}{-١} = \frac{ع}{٢}$

(٢) معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ(١، -١، ٢) ، ب (-١، ٠، ١) هى

أ $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ١}{-١} = \frac{ع - ٢}{١}$ ب $\frac{س + ١}{-٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع - ١}{-١}$

ج $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص + ١}{٣} = \frac{ع - ١}{٢}$ د $\frac{س - ١}{١} = \frac{ص + ١}{٣} = \frac{ع - ٢}{١}$

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ع + ١}{-٢}$ ، ص = ١، $\frac{س + ١}{١} = \frac{ص - ٢}{٢} = \frac{ع + ١}{-٢}$ تساوى

أ °١٥ ب °٣٠ ج °٤٥ د °٦٠

(٤) إذا كان المستقيمان $ل_١$: $\frac{س}{٢} = \frac{ص - ١}{-١} = \frac{ع - ٢}{م}$ ، $ل_٢$ = $\frac{س - ١}{م} = \frac{ص - ٢}{١} = \frac{ع}{-١}$ متعامدين . فما قيمة م

أ -١ ب ٢ ج ١ د -٣

(٥) إذا كان المستقيمان $ل_١$: س = ٢ك - ١، ص = ك + ١، ع = ك - ١، $ل_٢$: س = أك - ١، ص = ٢ك + ١، ع = ب ك - ٢ متوازيين فإن أ + ب =

أ ٤ ب -٢ ج ٦ د -٢

(٦) النقطة (٢، -١، ٣) تقع على المستوى

أ س + ص - ع = ٦ ب ٢س - ٣ص + ع = -١٠ ج ٣س - ٢ص + ٤ع = ٢٠ د س - ٢ص + ٥ع = ٤

(٧) إذا قطع المستوى $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٢} + \frac{ع}{٢} = ١$ محاور الإحداثيات فى النقط أ، ب، جـ فإن مساحة △ أ ب جـ =

أ ١٢ ب ١٠ ج ٦ د ٤

(٨) طول العمود من النقطة (٢، ٣، ١) إلى المستوى ٢س - ٢ص + ع = ٥ هو

أ ١ ب ٢ ج ٣ د ٤

(٩) معادلة خط تقاطع المستويين $ل_١$: ٢س - ص + ع - ١ = ٠، $ل_٢$: س - ٣ص - ع + ٢ = ٠ هى

أ $\frac{س + ١}{-١} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{٣}$ ب $\frac{س - ١}{١} = -\frac{ص}{٣} = \frac{ع - ٥}{١}$

ج $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص - ٣}{-٢} = \frac{ع}{-١}$ د $\frac{س - ١}{٤} = \frac{ص - ١}{٣} = \frac{ع}{-٥}$

(١٠) المستقيمان $ل_١$: $\frac{س+١}{-١} = \frac{ص-٢}{-١} = \frac{ع-١}{٣}$ ، $ل_٢$: $\frac{س+١}{١} = \frac{ص-٢}{-٢} = \frac{ع-١}{-١}$ يقعان فى المستوى

أ ٣س - ٥ص + ع - ١ = ٠ ب ٥س - ٤ص + ٢ع - ٧ = ٠

جـ ٧س - ٥ص - ع - ٤ = ٠ د ٧س + ٢ص + ٣ع = ٠

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١١) أوجد بُعد النقطة (-٢، ٤، -٥) عن المستقيم $\frac{س+٣}{٣} = \frac{ص-٤}{٥} = \frac{ع+٨}{٦}$

(١٢) أوجد بُعد النقطة (٢، ١، -١) عن المستوى $\overleftarrow{ر} \cdot (\overleftarrow{س} - ٢\overleftarrow{ص} + ٤\overleftarrow{ع}) = ٩$

(١٣) أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطتين (٣، -٤، -٥) (٢، -٣، ١) مع المستوى المار بالنقط (٢، ٢، ١) ، (٣، ٠، ١) ، (٤، -١، ٠)

(١٤) أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٢، -١، ٢) + ك (٣، ٤، ٢) مع المستوى $\overleftarrow{ر} \cdot$ (١، -١، ١) = ٥

(١٥) أوجد مسقط النقطة أ(٠، ٩، ٦) على المستقيم المار بالنقطتين ب (١، ٢، ٣) جـ (٧، -٢، ٥)

(١٦) أثبت أن المستويين ٢س + ص + ٢ع = ٨، ٤س + ٢ص + ٤ع + ٥ = ٠ متوازيان، وأوجد البعد بينهما.

تفكير إبداعى

(١٧) إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات فى النقط أ، ب، جـ وكانت النقطة (م، ن، و) هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ

أثبت أن معادلة المستوى هى $\frac{س}{م} + \frac{ص}{ن} + \frac{ع}{و} = ٣$

اختبار تراكمى

أكمل ما يأتى:

(١) قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم $\frac{س-١}{\sqrt{٢}} = \frac{ص-\sqrt{٢}}{١} = \frac{ع+١}{١}$ مع الاتجاه الموجب لمحور ع تساوى ....

(٢) طول العمود المرسوم من النقطة (-١، ٠، ١) على المستقيم $\frac{س-١}{٢} = \frac{ص-١}{١} = \frac{ع+١}{-١}$ يساوى ....

(٣) المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطتين أ(-١، ٠، ٣)، ب(١، -١، ٠) هى ....

(٤) قياس الزاوية بين المستويين -س - ص + $\sqrt{٢}$ ع + ١ = ٠، س - ص + $\sqrt{٢}$ ع - ٣ = ٠ تساوى ....

(٥) معادلة المستوى المار بالنقطة (٢، ٣، -١) والمتجه $\overleftarrow{ن}$ = (٥، ٢، -٣) عمودى عليه هى ....

(٦) المستوى ٣س - ٤ص + ع + ١٠ = صفر يقطع من محور ص جزءًا طوله ....

(٧) نقطة تقاطع المستقيم $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{١} = \frac{ع}{٣}$ والمستوى س - ٢ص + ٣ع + ٥ = ٠ هى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات:

(٨) البعد بين النقطة (أ، ب، جـ) ومحور س يساوى

(أ) $\sqrt{أ^٢ + جـ^٢}$ (ب) $\sqrt{أ^٢ + ب^٢}$ (جـ) $\sqrt{ب^٢ + جـ^٢}$ (د) $\sqrt{ب^٢ + جـ^٢}$

(٩) معادلة محور س فى الفراغ هى

(أ) س = ٠ ، ص = ٠ (ب) س = ٠ ، ع = ٠ (جـ) ص = ٠ ، ع = ٠ (د) س = ٠

(١٠) معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢، -١، ٣) ، (٠، ٣، ١)

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (٢، -١، ٣) + ك(٢، -٤، ٢)
(ب) $\overrightarrow{ر}$ = (٢، -١، ٣) + ك(٢، ٢، ٤)
(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٢، -٤، ٢) + ك(٢، -١، ٣)
(د) $\overrightarrow{ر}$ • (٢، -٤، ٢) = صفر

(١١) النقطة التى تقطع على المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (٢، -١، ٣) + ك (١، ٢، -١)

(أ) (١، ١، ١) (ب) (٠، ٢، -٢) (جـ) (٣، ١، ٢) (د) (٤، -٣، ٠)

(١٢) المسافة بين المستويين ص = ٤، ص = -٢ هى

(أ) ٣ وحدات (ب) وحدتان (جـ) ٦ وحدات (د) ٨ وحدات

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٣) اكتب المعادلة الاحداثية لكل من المستقيمات الآتية:

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (١، ٣، ٩) + ك (٥، ٤، ٢)

(ب) المستقيم المار بالنقطة (٠، ٢، ٠) والمتجه $\overrightarrow{هـ}$ = (٣، -١، ٤) متجه اتجاه له

(١٤) أوجد قياس الزاوية بين

(أ) المستقيمين $ل_١$: ٢س = ٣ص - ١ = ع - ٣، $ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢، -١، ٥) + ك (-١، ١، ٢)

(ب) المستويين ٣س - ص = ٥، س - ٢ص = ٤

(١٥) أوجد المعادلة الإحداثية للمستوى الذى معادلته (س، ص، ع) = (٢، ٣، ٥) + $ك_١$ (-١، ٣، ٤) + $ك_٢$ (٦، ١، -٢)
حيث $ك_١$، $ك_٢$ بارامترات

(١٦) أوجد قياس الزاوية بين المستويين ٢س + ٢ص + ٧ع = ٨
٣س - ٤ص + ٤ع = ٥

لمزيد من الأنشطه والتدريبات زيارة الموقع الالكترونى www.sec3mathematics.com.eg

الاختبار الأول

أولًا: أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين

السؤال الأول: أختر الإجابة الصحيحة:

(١) إذا كان $^{ن}ق_{ن-٣} = ٢٠$ فإن ن =
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢) ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ... + ت^{١٠٠} =
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ١٠٠

(٣) إذا كان أ (٧، -١، ٨) ، ب (١١، ٢، -٤) فإن طول $\overline{أب}$ = ... سم
(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(٤) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤س - ٦ص + ٨ع + ٤ = ٠ معادلة كرة طول قطرها = ... سم
(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

(٥) إذا كان ل$_{١}$: $\frac{س - ٣}{١} = \frac{ص + ٢}{-٢} = \frac{ع + ١}{-٤}$ يوازى ل$_{٢}$: $\frac{س + ٥}{-٢} = \frac{ص}{ك + ١} = \frac{ع - ١}{٨}$ فإن ك =
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٦) إذا كان θ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ = (-٢، -٦، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢، ٦، -١) فإن θ =
(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

السؤال الثانى: أكمل ما يأتى:

(١) معامل س^{٥} فى مفكوك (٣ - ٢س)^{٧} يساوى ....

(٢) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ٠ & س & ٣ \\ ٠ & ٠ & س \end{vmatrix}$ - ٨ = ٠ فى ح هى ....

(٣) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ٢$\overrightarrow{س}$ + ٣$\overrightarrow{ص}$ + ك$\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = -٦$\overrightarrow{س}$ - ٤$\overrightarrow{ص}$ + ٤$\overrightarrow{ع}$ وكان $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ فإن ك = ...

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٣، ٠، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{س}$ - ٢$\overrightarrow{ص}$ + ٣$\overrightarrow{ع}$ فإن $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ = ...

(٥) معادلة الكرة التى مركزها (٢، -٣، ١) وطول نصف قطرها ٢$\sqrt{٥}$ هى ....

(٦) معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ(٢، -١، ٤) ، ب(-١ ، ٠ ، ٢) هى ....

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الثالث:

(١) فى مفكوك $(٢س + \frac{١}{س^{٢}})^{١٥}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س وأثبت أن هذا المفكوك لايشتمل على حد يشتمل على س٥

(٢) أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{٢ص - ١}{٥} = \frac{٣ع + ٢}{٤}$

السؤال الرابع:

(١) أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ١ & ٥ & ٢١ \end{pmatrix}$

(٢) أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب ع = ٢ - ٢$\sqrt{٣}$ ت على الصورة المثلثية.

السؤال الخامس:

(١) حل المعادلات الآتية س + ٣ص + ٢ع = ١٣ ، ٢س - ص + ع = ٣ ، ٣س + ص - ع = ٢ باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

(٢) أوجد نقطة تقاطع المستويات ٢س + ص - ع = - ١، س + ص + ع -٢ = ٠، ٣س - ص - ع = ٦

الاختبار الثانى

أولًا: أجب عن سؤال واحد فقط مما يأتى فى الإختبار التالى:

السؤال الأول: أختر الإجابة الصحيحة:

(١) إذا كان للمعادلتين ٢س +ص =١ ، ٤ س + ٢ ص = ك عدد لانهائى من الحلول فإن ك =

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣)

(٢) إذا كان $^{ن+١}ق_{ر}$: $^{ن}ق_{ر}$ = ٢ : ٣ فإن ن = ((أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٥ (د) ١١)

(٣) إذا كان س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٦س - ٤ص + ١٠ع - ٨ = ٠ معادلة كرة مركزها م فإن م =

(أ) (-٣ ، ٢ ، -٥) (ب) (٤، -٢، -٥) (ج) (-٣ ، -٢، -٥) (د) (٣ ، ٢ ، ٥)

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-٢، ٤، ٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ك، ٣) حيث ك ∈ ص$^+$ وكان || $\overrightarrow{أب}$ || = ٧ فإن قيمة ك =

(أ) ١٠ (ب) ٨ (ج) ٦ (د) ٤

(٥) إذا كان θ قياس الزاوية المحصورة بين $\overrightarrow{أ}$ = (٢، ٠ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ٠ ، ٤) فإنθ =

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (ج) ٦٠° (د) ٩٠°

(٦) إذا كان ل$_١$: $\frac{س - ٣}{٢}$ = $\frac{-ص - ١}{٦}$ = $\frac{ع}{ك}$ يوازى ل$_٢$: $\frac{س + ٢}{٦}$ = $\frac{ص - ٤}{م}$ = $\frac{ع - ١}{٣}$ فإن ك + م =

(أ) -١٧ (ب) -١٠ (ج) ١٠ (د) ١٧

السؤال الثانى: أكمل

(١) ω + $\omega^٢$ + ... $\omega^{١٠٠}$ = ...

(٢) إذا كان أَ، بَ، جـَ هى أطوال أضلاع مثلث فإن قيمة
$\begin{vmatrix} أَ & بَ & جـَ \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ جاأ & جاب & جاجـ \end{vmatrix}$ = ...

(٣) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-١، ٤، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢، ٢، ١) فإن مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى إتجاه $\overrightarrow{ب}$ = ...

(٤) س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٤ك س+ ٤ص - ٨ع + ٢ك = ٠ معادلة كرة طول نصف قطرها ٢$\sqrt{٥}$ فإن قيمة ك = ...

(٥) إذا كان المستوى ٣س - ص + ٢ع + ٣ = ٠ ، المستوى ك س - ٤ص + ع -٥ = ٠ متعامدان فإن قيمة ك = ...

(٦) إذا كانت جـ (-١، ٦، -٥) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (ك - ٢، -١، م + ٣)، ب (٢، ن - ٧، -٢) فإن ك + م - ن = ٠

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الثالث:

(١) أوجد معامل $س^٥$ فى مفكوك $(١ - س + س^٢)(١ + س)^{١١}$

(٢) أثبت أن المستقيم $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ٣}{-١} = \frac{ع}{٣}$ يقطع المستوى ٣س + ٢ص + ع - ٨ = ٠ فى نقطة ثم أوجد قياس زاوية ميل المستقيم على المستوى.

السؤال الرابع:

(١) احسب رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{pmatrix}$

ومن ثم أثبت أن مجموعة المعادلات ٢س - ص - ٣ع = ٢ ، س + ٢ص + ع = ١ ، ٣س - ٥ص + ٢ع = ١٣ لها حل وحيد وأوجد ذلك الحل باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة.

(٢) أوجد الصورة الأسية للعدد ع = $\frac{٢ + ٦ت}{٣ - ت}$ ثم أوجد كلا من $ع^{-١}$ ، $\bar{ع}$ ؛ $\sqrt{ع}$ على الصورة المثلثية.

السؤال الخامس:

(١) أثبت أن إحدى قيم المقدار $\sqrt{ت} - \sqrt{-ت} = \sqrt{٢}$

(٢) إذا كان $(س - ٢)^٢ + (ص + ٤)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ١$ ، $(س + ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ٤$ معادلتا كرتين أوجد البعد بين مركزى الكرتين وبين أن الكرتين غير متقاطعين

الاختبار الثالث

أولًا: أجب عن سؤال واحد فقط مما يأتى:

السؤال الأول: أختر الاجابة الصحيحة :

(١) مجموع معاملات الحدود في مفكوك $(١ + س)^٥$ يساوى =

(أ) صفر (ب) ٥ (ج) ٣٢ (د) $\underline{|٥}$

(٢) إذا كان س عدد مركب فإن عدد حلول المعادلة $\begin{vmatrix} س^٣ + ١ & س - ١ \\ س + ١ & س^٣ - ١ \end{vmatrix} = ٠$ يساوى

(أ) ٦ (ب) ٥ (ج) ٤ (د) ٣

(٣) إذا كان (س، ص، ع) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(-٤، ٠، ٥)، ب (-٢، ٤، -١٣) فإن س + ص + ع =

(أ) -٥ (ب) -٦ (ج) ٣ (د) ٤

(٤) إذا كان أ (-٤، -٢، ٣) ، ب (١، ٢، ك) وكان طول $\overline{أب} = \sqrt{٧٧}$ فإن احدى قيم ك هى

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٩

(٥) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-١، ٣، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ (٠، -٢، ٥) فإن $||\overrightarrow{أب}||$ =

(أ) $٢\sqrt{٣}$ (ب) $٣\sqrt{٣}$ (ج) $٤\sqrt{٣}$ (د) $٥\sqrt{٣}$

(٦) طول العمود المرسوم من القطعة أ(٣، ٠، -٥) على المستوى ٢س + $\sqrt{٥}$ ص + ٤ ع - ٦ = ٠ يساوى ......

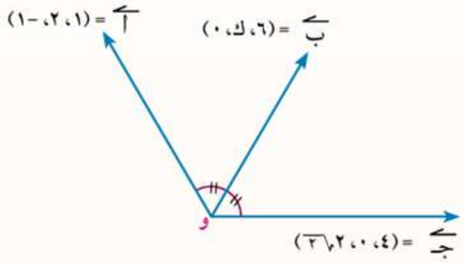
(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

السؤال الثانى: اكمل مايأتى:

(١) إذا كان ع = جا ٦٠° - ت جتا ٦٠° فإن سعة العدد ع = ...

(٢) رتبة المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٥ & ٥ \end{pmatrix}$ = ...

(٣) من الشكل الموضح قيمة ك = ...



(٤) طول نصف قطر الكرة $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢}$ + ٤س -٦ص + ٨ع + ٤ = ٠ يساوى ....

(٥) إذا كان المستقيم $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{ص + ١}{-٦} = \frac{ع - ٢}{ك}$ يوازى المستقيم $\frac{س + ٢}{٤} = \frac{ص - ٥}{م} = \frac{ع - ١}{٣}$ فإن ك + م = ...

(٦) إذا كان $\frac{س + ٢}{٦} = \frac{ص - ١}{م} = \frac{ع - ١}{٣}$ عمودى على المستقيم $\frac{س - ٩}{-٢} = \frac{ص + ٨}{١}$ ، ع = ٣ فإن م = ...

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الثالث:

(١) إذا كان $(م + س)^{ن}$ = ٣أ + ٦أس + ٥أ$س^{٢}$ + ... حيث ن ∈ $ص_{+}$ أوجد قيمة كل من م، أ

(٢) أثبت أن مجموعة المعادلات الآتية لها حل آخر غير الحل الصفرى وأكتب الصورة العامة لهذا الحل

٢س - ص + ٣ع = ٠ ، ٤س + ٥ص - ع = ٠ ، ٢س + ٣ص - ع = ٠

السؤال الرابع:

(١) إذا كان $|ع_{١}| = |ع_{٢}|$ = ١ ، سعة $(ع_{١} ع_{٢}^{٣})$ = ٨١° ، سعة $\left(\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}\right)$ = ٣٣°

أوجد على صورة س + ص ت العدد $(ع_{١}^{١٥} + ع_{٢}^{١٥})$

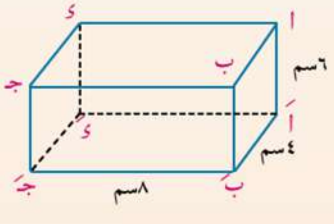
(٢) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ (-٢، ٣، ١) على المستقيم $\frac{س + ٢}{٢} = \frac{ص - ٣}{٤} = \frac{ع - ١}{٤}$

السؤال الخامس:

(١) أثبت أن $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ أ^{٢} & ب^{٢} & جـ^{٢} \\ ب جـ & جـ أ & أ ب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ^{٢} & ب^{٢} & جـ^{٢} \\ أ^{٣} & ب^{٣} & جـ^{٣} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

(٢) فى الشكل المقابل أ ب جـ ء أَ بَ جـَ ءَ متوازى مستطيلات

أوجد $\overrightarrow{ب ءَ} \cdot \overrightarrow{جـ أَ}$



الاختبار الرابع

أولًا: أجب عن سؤال واحد فقط مما يأتى:

السؤال الأول: أختر الإجابة الصحيحة:

① إذا كان $^{10}\text{ق}_{ر+1} : {}^{10}\text{ق}_{ر-1} = 21 : 10$ فإن قيمة ر =

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

② إذا كان $\begin{vmatrix} \text{لو}_2 3 & 3 & 9 \\ 0 & \text{لو}_2 5 & 7 \\ 0 & 0 & \text{لو}_5 \text{س} \end{vmatrix} = 4$ فإن س =

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ١٢٨

③ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (1, -1, 2)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (0, 2, -3)$، $\overrightarrow{\text{جـ}} = (-2, 1, 0)$ فإن $\|3\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}\| =$

(أ) $8\sqrt{3}$ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) $7\sqrt{2}$

④ إذا كان ل₁: $\frac{\text{س}+2}{-1} = \frac{\text{ص}+3}{3} = \frac{\text{ع}+5}{2}$ عمودى على ل₂: $\frac{\text{س}}{2} = \frac{\text{ص}-5}{\text{ك}} = \frac{\text{ع}-6}{\text{م}}$ فإن ٣ك + ٢م =

(أ) -١ (ب) ٠ (جـ) ٢ (د) ٤

⑤ قياس الزاوية بين المستقيمين $\text{س} - 1 = \frac{\text{ص}+2}{\sqrt{2}} = -\text{ع} + 1$، $-\text{س} = \text{ع} + 3$، ص = ٤ يساوى

(أ) °٤٥ (ب) °١٢٠ (جـ) °١٣٥ (د) °١٥٠

⑥ جيوب تمام الاتجاه للمتجه (٢، -٤، ٤) هى

(أ) (٢، -٤، ٤) (ب) (١، -٢، ٢) (جـ) $(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$ (د) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

السؤال الثانى: أكمل:

① $(3 + 7\omega + 3\omega^2)(3 - 7\omega^2 + 3\omega) =$ ....

② رتبة المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 3 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$ يساوى ....

③ مركز الكرة $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 + 8\text{س} - 12\text{ص} + 2\text{ع} + 1 = 0$ يساوى ....

④ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم فإن $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أجـ}} =$ ....

⑤ متجه الوحدة فى إتجاه $\overrightarrow{\text{أ}} = (2, 3, 2\sqrt{3})$ يساوى ....

⑥ طول العمود المرسوم من النقطة (-٢، -٣، ١) على محور س يساوى ....

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الثالث:

(١) أوجد اكبر حد فى مفكوك $(٣ + ٢ س)^{٦}$ عند س = ١

(٢) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أضلاع متجاورة يمثلها المتجهات:
$\overrightarrow{أ}$ = (١، -١، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣، -٢، ٠) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (٠، ٢، ٤)

السؤال الرابع:

(١) أوجد جذور المعادلة $ع^{٤}$ + ٤ = صفر على الصورة المثلثية

(٢) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ ثلاث متجهات وحدة متعامدة مثنى مثنى
أوجد: (أ) || ٢ $\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$ + ٣ $\overrightarrow{جـ}$ || (ب) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$) $\overrightarrow{ب}$ = ($\frac{٣}{٥}$ ، ٠ ، $\frac{-٤}{٥}$) أوجد $\overrightarrow{جـ}$

السؤال الخامس:

(١) إبحث إمكانية حل المعادلات الآتية وأكتب الحل إن وجد: س + ص = ٢ ، ٢س + ٣ص = ٥

(٢) إذا كان ع = جا $\frac{\pi}{٩}$ + ت جتا $\frac{\pi}{٩}$ أوجد (ع) على الصورة المثلثية أوجد الجذور التكعيبية للعدد $(ع)^{٩}$

الاختبار الخامس

أولًا: أجب عن سؤال واحد فقط مما يأتى:

السؤال الأول: أختر الإجابة الصحيحة من الاجابات المعطاه:

(١) إذا كان $٣٦^{٢ن-١}$ $ل_{ن-١}$ = $٩^{٢ن}$ $ل_{ن}$ فإن ن =
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢) إذا كان للمعادلتين س + ص = ٢ ، ٢س + ك ص = ٤ أكثر من حل فإن ك =
(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٢

(٣) إذا كان $\overrightarrow{أب}$ = -٣ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ + ٧ $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب جـ}$ = $\overrightarrow{ص}$ + ٥ $\overrightarrow{ع}$ فإن || $\overrightarrow{أ جـ}$ || =
(أ) ١٣ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٩

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-٧، ٣، ١٠) $\overrightarrow{ب}$ = (-٤، -١، -٢) فإن متجه الوحدة فى إتجاه $\overrightarrow{أب}$ =
(أ) ($\frac{٣}{١٣}$ ، $\frac{٤}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$) (ب) ($\frac{٣}{١٣}$ ، $\frac{-٤}{١٣}$ ، $\frac{-١٢}{١٣}$) (جـ) ($\frac{-٣}{١٣}$ ، $\frac{٤}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$) (د) ($\frac{-٣}{١٣}$ ، $\frac{-٤}{١٣}$ ، $\frac{-١٢}{١٣}$)

(٥) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (١، -١، ٢) $\overrightarrow{ب}$ = (٣، -٢، ٠)، $\overrightarrow{جـ}$ = (٠، ٢، ٤) فإن $\overrightarrow{أ}$ • $\overrightarrow{ب}$ × $\overrightarrow{جـ}$ =
(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ١٦

(٦) طول العمود المرسوم من النقطة أ(١، ٠، ٢) على المستقيم $\frac{س - ٢}{٢}$ = $\frac{ص + ١}{-١}$ = $\frac{ع - ٣}{-٢}$ يساوى
(أ) $\frac{\sqrt{٢٦}}{٤}$ (ب) $\frac{\sqrt{٢٦}}{٥}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٢٦}}{٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٢٦}}{٦}$

السؤال الثانى: أكمل:

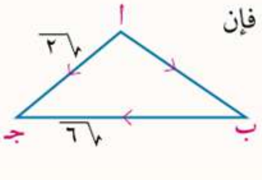
(١) $(٢ + \frac{٣}{\omega})\,(٢ + \frac{٣}{\omega^{٢}})\,(٣ - \frac{٢}{\omega})\,(٣ - \frac{٢}{\omega^{٢}}) =$ ....

(٢) إذا كان معاملا $\text{ح}_{٦}$ ، $\text{ح}_{١٦}$ فى مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$ متساويين فإن قيمة ن = ...

(٣) جيب تمام الزاوية المحصورة بين المستقيمين:

$\frac{\text{س}}{١} = \frac{\text{ص}}{-٢} = \frac{\text{ع} + ١}{-٢}$ ، $\frac{\text{س}}{١} = \frac{\text{ص} - ٢}{-٢} = \frac{\text{ع}}{٢}$ يساوى ....

(٤) فى الشكل المقابل إذا كان $||\overrightarrow{\text{ب جـ}}|| = \sqrt{٦}$ ، $||\overrightarrow{\text{أ جـ}}|| = \sqrt{٢}$ ، $\overrightarrow{\text{ب أ}} = (-١، ٠، ١)$ فإن $\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب جـ}} =$ ....



(٥) الصورة القياسية لمعادلة الكرة التى مركزها (٣، ٤، -٥) وتمس المستوى ص ع هى ....

(٦) الصورة المتجهه لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، -١، ٤) ومتجه اتجاهه $\overrightarrow{\text{هـ}} = (٤، ٧، ١)$ هى ....

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الثالث:

(١) فى مفكوك $(١ + \text{س})^{١٨}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معاملا الحدين $\text{ح}_{٢\text{ر}+٤}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}-٢}$ متساويين ، أوجد قيمة ر.

(٢) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة أ(٠، -١، ٢) على المستوى $\sqrt{٢}$ س + ص - ع + ك = ٠ يساوى ٢ وحدة طول أوجد قيمة ك.

السؤال الرابع:

(١) حل المعادلات الآتية ٢س + ص - ٢ع = ١٠ ، س + ٢ص + ٢ع = ١، ٥س + ٤ص + ٣ع = ٦ بأستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

(٢) إذا كان $\text{ع}_{١} = \frac{٦ + ٤\text{ت}}{١ + \text{ت}}$ ، $\text{ع}_{٢} = \frac{٢٦}{٥ - \text{ت}}$ إذا كان ع = ٤ $(\text{ع}_{١} - \text{ع}_{٢})$ أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية

السؤال الخامس:

(١) بدون فك أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{أ}^{٢} + ١ & \text{أب} & \text{أجـ} \\ \text{أب} & \text{ب}^{٢} + ١ & \text{جـب} \\ \text{أجـ} & \text{جـب} & \text{جـ}^{٢} + ١ \end{vmatrix} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢} + ١$

(٢) إذا قطع المستوى ٢س - ص - ٢ع + ١٢ = ٠ الكرة $(\text{س} + ٣)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} + (\text{ع} - ١)^{٢} = ١٥$ أوجد مساحة المقطع الناتج

الاختبار السادس

أولاً: أجب عن سؤال واحد فقط مما يأتى:

السؤال الأول: أختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن-١}}\text{ق}_{\text{٤}} = ٨ : ٥$ فإن قيمة ن

(أ) ٥ (ب) ٧ (ج) ٨ (د) ٩

(٢) معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(\text{٣س} - \frac{\text{١}}{\text{٦}})^{\text{١٠}}$ يساوى

(أ) $\frac{\text{٦٣-}}{\text{٨}}$ (ب) $\frac{\text{٦٧-}}{\text{٨}}$ (ج) $\frac{\text{٦٣}}{\text{٨}}$ (د) $\frac{\text{٦٧}}{\text{٨}}$

(٣) قياس الزاوية المحصورة بين المستويين: س + ص - ١ = ٠ ، ص + ع - ١ = ٠ يساوى

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (ج) ٦٠ (د) ٧٥

(٤) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢، ١، -٢) ، $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ فإن $\overleftarrow{\text{ب}}$ =

(أ) (٢، -١، -٢) (ب) (٢، ١، -٢) (ج) (-٢، -١، ٢) (د) (-٢، -١، ٣)

(٥) إذا كان أ(-٢، ٠، ٣) ، ب(٤، ٢، -٥) فإن $\|\overleftarrow{\text{أب}}\|$ = ... وحدة طول

(أ) $\sqrt{\text{١٢}}$ (ب) $\sqrt{\text{٤٠}}$ (ج) $\sqrt{\text{٤٤}}$ (د) $\sqrt{\text{١٠٤}}$

(٦) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{جـ}}$ وكان $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٢، ٣، ٢)، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (١، ٢، ١) وكان $\|\overleftarrow{\text{أ}}\| = \text{٤}\sqrt{\text{٢}}$ فإن $\overleftarrow{\text{أ}}$ =

(أ) (٢، ٣، ١) (ب) ٦(-٤، ٠، ٤) (ج) (٤، ٤، ٠) (د) (٠، -٤، ٤)

السؤال الثانى: أكمل:

(١) $(\text{١} - \frac{\text{١}}{\omega})(\text{١} - \frac{\text{١}}{\omega^{\text{٢}}})(\text{١} - \frac{\text{١}}{\omega^{\text{٤}}})(\text{١} - \frac{\text{١}}{\omega^{\text{٨}}})$ .... إلى ١٠ عوامل = ...

(٢) رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{١-} & \text{٠} & \text{٠} \\ \text{١-} & \text{١-} & \text{٠} \\ \text{١} & \text{١} & \text{١} \end{pmatrix}$ تساوى = ...

(٣) متجه إتجاه المستقيم $\frac{\text{س} + \text{٢}}{\text{٣}} = \frac{\text{ع} - \text{١}}{\text{٢}}$ يساوى ....

(٤) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين $\frac{\text{س}}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢}} = \frac{\text{ع}}{\text{١}}$ ، $\frac{\text{س}}{\text{٢}} = \frac{\text{ص}}{\text{١}} = \frac{\text{ع}}{\text{١-}}$ يساوى ٦٠° فإن قيمة أ = ...

(٥) إذا كان أ (١، ٠، ٠) ب (٠، ١، ١) ينتميان للمستوى ك س + ص + م ع + ٢ = ٠ فإن ك + م = ...

(٦) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (١، ٠، ٢) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٢، -١، -٢) فإن $(\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}) \odot (\overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{أ}})$ = ...

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الثالث:

(١) إذا كانت معاملات الحدود الرابع والخامس والسادس فى مفكوك (٢س + ص)^{ن} حسب قوى س التنازلية تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة ن

(٢) كرة مركزها (١، ٢، ١) تمس سطح المستوى س + ص + ع = ١ أوجد معادلة الكرة

السؤال الرابع:

(١) إبحث إمكانية حل مجموعة المعادلات الآتية: ٤س + ٣ص - ٥ع = ٦، ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢، ٥س - ٢ص - ٧ع = ١
ثم أوجد مجموعة حل هذه المعادلات باستخدام المعكوس الضربى

(٢) إذا كان ع$_{١}$ = $\left(\frac{\sqrt{٣} + ت}{٢}\right)^{٤}$ ، ع$_{٢}$ = جا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جتا $\frac{\pi}{٣}$ ، ت^{٢} = -١ وكان ع = $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ أوجد الجذور التربيعية للعدد ع على الصورة المثلثية

السؤال الخامس:

(١) بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} ب & ا & س \\ ب & س & ا \\ س & ا & ب \end{vmatrix}$ = (س + ا + ب) (س - ا) (س - ب)

(٢) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، ١، -٣) و يوازى المستقيم $\frac{س - ١}{٥} = \frac{ص + ٣}{٢} = \frac{١ - ع}{٣}$

الاختبار السابع

أولا: أجب عن سؤال واحد فقط مما يأتى:

السؤال الأول: أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

(١) إذا كان $^{٣٠}ق_{ر} = {}^{٣٠}ق_{ر+١٠}$ ، $^{ن}ل_{٧} = ٩٠ \times {}^{ن-٢}ل_{٥}$ فإن $\underline{|ن - ر}$ =

أ) صفر ب) ١ جـ) ١٠ د) $\underline{|٢٠}$

(٢) إذا كان للمعادلات ٣س - ٢ص + ع = ٠ ، ٦س - ٥ص + ٢ع = ٠ ، ٩س - ٦ص + ك ع = ٠ حلول الحل الصفرى فإن ك =

أ) صفر ب) ١ جـ) ٣ د) ٤

(٣) طول العمود المرسوم بين المستويين ٣س + ١٢ص - ٤ع = ٩، ٣س + ١٢ص - ٤ع = -١٧ يساوى

أ) ٢ ب) ٣ جـ) ٤ د) ٥

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٤، -ك، ٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢، ٢، م) وكان $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ فإن ك + م =

أ) -٣ ب) -٢ جـ) -١ د) صفر

(٥) إذا كان المستقيم س = ٣ص = أع يوازى المستوى س + ٣ص + ٢ع + ٤ = ٠ فإن أ =

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) -١

(٦) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١، -٢، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (-٢، ١، ٢) فإن متجه اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ =

أ (٤/٩ ، -٢/٩ ، -٤/٩)   ب (٤/٩ ، ٢/٩ ، ٤/٩)   ج (-٤/٩ ، -٢/٩ ، -٢/٩)   د (٤/٩ ، -٢/٩ ، -٤/٩)

السؤال الثانى: أكمل:

(١) $\left(\frac{3+5\omega}{5+3\omega^2}+\frac{5+3\omega^2}{3+5\omega}\right)^8$ = ...

(٢) رتبة المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ١ & ١ & -١ \\ ١ & -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ تساوى = ...

(٣) إذا كان المستوى سـ: س - ع + ١ = ٠، المستوى صـ : ٢س - ٢ص - ع = ٠ فإن قياس الزاوية بين المستويين = ...°

(٤) طول نصف قطر الكره (س - ٢)^2 + (ص + ٤)^2 + (ع - ٥)^2 = ٦٤ يساوى ....

(٥) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤، -٥، ١)، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢، -ك ، -٢) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (-٤، ٤، م -٢) وكان $\overrightarrow{\text{أب}}$ // $\overrightarrow{\text{جـ}}$ فإن ك + م = ...

(٦) إذا كان ||$\overrightarrow{\text{أ}}$|| = ٢، ||$\overrightarrow{\text{ب}}$|| = ٣، ||$\overrightarrow{\text{جـ}}$|| = ١٢ وكان $\overrightarrow{\text{أ}}$، $\overrightarrow{\text{ب}}$، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ متعامده مثنى فإن ||$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ}}$|| = ...

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الثالث

(١) إذا كان $ع_1$ = (جا $\frac{\pi}{9}$ + ت جتا $\frac{\pi}{9}$)^5 ، $ع_2$ = (جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$)^4 وكان ع = $\frac{ع_1}{ع_2}$ أوجد الجذور التربيعية للعدد ع على الصورة الأسية

(٢) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ جتا θ ، لو$_3$ س، جاθ) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (جتا θ ، لو$_5$ ٢٧ ، ٢جاθ) وكان $\overrightarrow{\text{أ}}$ • $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ١١ أوجد قيمة س

السؤال الرابع

(١) فى مفكوك (١ + س)^{ن} حسب قيمة س التصاعدية إذا كان $ح_3$ = ١٧ ، ٣ $ح_2$ × $ح_4$ = ٥٤٤ أوجد قيمة كل من ن، س

(٢) بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} أ+ب+٢ & أ & ب \\ ١ & ٢أ+ب+١ & ب \\ ١ & أ & أ+٢ب+١ \end{vmatrix}$ = ٢(أ + ب + ١)^3

السؤال الخامس:

(١) اذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ص & ع \\ س & ص & -ع \\ س & -ص & ع \end{pmatrix}$ وكان أ^{مد} = أ$^{-1}$ اوجد قيم كل من س، ص، ع

(٢) أوجد نقطة تقاطع المستقيم س = ص = ع مع المستوى س + ٢ص + ٣ع = ١٢

الاختبار الثامن

أولًا: أجب عن سؤال واحد فقط مما يأتى:

السؤال الأول: أكمل:

(١) إذا كان $|١ + \text{لو}\,س| = ١$ فإن س = ... أو ....

(٢) إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ أ & ب & جـ \end{vmatrix} = ٥$ فإن قيمة $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ أ+٥ & ب+٥ & جـ+٥ \end{vmatrix} =$ ....

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين $\overrightarrow{ر_١}$ = (-٢، ٥، -٧) + ك (-٦، ٦، ٨)، $\overrightarrow{ر_٢}$ = (١، -٢، ٣) + ك٭ (٤، ١٢، -٦) يساوى ....

(٤) إذا كان ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ٤ ، ‖ $\overrightarrow{ب}$ ‖ = ٦ وكان قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يساوى ٦٠° فإن
(٢ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$) • ($\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$) = ...

(٥) معادلة الدائرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث أ (٧، ١، -٤) ، ب (٣، -١، ٢) هى ....

(٦) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (١، ٢، -٤)، $\overrightarrow{ب}$ = (١، ١، ك - ١) وكان ‖ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ ‖ = ٧ وحدة طولية فإن ك = ...

السؤال الثانى: أختر الإجابة الصحيحة

(١) إذا كان $\frac{أ^٢ + ب^٢}{أ + ب\,ت} = ٢ + ٣ت$ فإن أ × ب = حيث أ، ب ∋ ح٭

أ) -٦ ب) -٥ جـ) ٥ د) ٦

(٢) رتبة المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٠ & -٢ & ٣ \\ -٢ & ٤ & -٦ \\ ٣ & -٦ & ٩ \end{pmatrix}$ تساوى

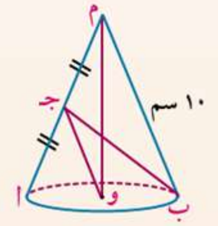
أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) صفر

(٣) أ ب جـ ء متوازى أضلاع وكان $\overrightarrow{أب}$ = (٢، ٢، -١) ، $\overrightarrow{أء}$ = (-١، ٢، -٣) فإن مساحة متوازى الأضلاع = ... سم^٢

أ) ٦ ب) $٧\sqrt{٢}$ جـ) $٣\sqrt{١١}$ د) $\sqrt{١٠١}$

(٤) فى الشكل المقابل مخروط دائرى قائم محيط قاعدته = ١٢π سم ،

و جـ منتصف $\overline{أم}$ فإن $\overrightarrow{بجـ}$ • $\overrightarrow{جـو}$ =



أ) -٤٣ ب) -٤٠

جـ) -٣٧ د) -٣٣

(٥) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٢$\overrightarrow{س}$ - $\overrightarrow{ص}$ - $\overrightarrow{ع}$ كان $\overrightarrow{أ}$ × ($\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$) =

(أ) $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ع}$ (ب) -٣$\overrightarrow{ص}$ + ٣$\overrightarrow{ع}$ (جـ) -٣$\overrightarrow{س}$ - ٣$\overrightarrow{ص}$ (د) ٣$\overrightarrow{س}$ - ٢$\overrightarrow{ص}$

(٦) إذا كان ل$_١$: س = ٠ ، ص = ع ، ل$_٢$: ص = ٠ ، س = ع مستقيمان فى الفراغ قياس الزاوية بينهما θ فإن θ =

(أ) ٤٥° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ١٦٥°

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الثالث:

(١) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل المعادلات الآتية:

٢س - ص + ع = -١، س - ع = ٢ ، س + ص = ٣

(٢) أوجد نقطة تقاطع المستويات ٢س + ص - ع = -١، س + ص + ع = ٢، ٣س - ص - ع = ٦

السؤال الرابع:

(١) إذا كان ع$_١$ = ١ - $\sqrt{٣}$ ت ، ع$_٢$ = جتا هـ + ت جا هـ ، ع$_٣$ = (جتا $\frac{هـ}{٢}$ - ت جا $\frac{هـ}{٢}$)^٢ وكان ع = $\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}$ أوجد المقياس والسعة الأساسية للعدد ع ثم أوجد الجذرين التربيعين للعدد ع على الصورة المثلثية عند هـ = $\frac{\pi}{٦}$

(٢) إبحث إمكانية وجود حل خلاف الحل الصفرى لمجموعة المعادلات الخطية الآتية:

س + ٣ص - ٢ع = ٠ ، س - ٨ص + ٨ع = ٠ ، ٣س - ٢ص + ٤ع = ٠

السؤال الخامس:

(١) فى مفكوك (س^٢ + $\frac{١}{س^٢}$)^{٣ن} حسب قوى س التنازلية

أولًا: أثبت أن الحد الخالى من س رتبته (٢ن + ١)

ثانيًا: أوجد النسبة بين الحد الخالى من س والحد الأوسط عندما ن = ٤، س = ١

(٢) إذا كانت الكرتان (س - ٣)^٢ + ص^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٦، (س + ١)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ك)^٢ = ٢٥ متماستان فأوجد قيمة ك

الاختبار التاسع

أولًا: أجب عن سؤال واحد فقط مما يأتى:

السؤال الأول: أكمل:

(١) إذا كان $^{س+ص}ل_٤ = ٣٦٠$ ، $\underline{|٢س+ص} = ٥٠٤٠$ فإن $^{ص}ق_{٢س} =$ ....

(٢) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} ١+أ & ٣ & ٢ \\ ٠ & أ-١ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٧ \end{vmatrix} = ٢١$ هى ....

(٣) جيب تمام الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ} = (١، -٣، ٠)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢، ٠، ١)$ يساوى ....

(٤) طول نصف قطر الكرة: $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢س - ٢ص - ٤ع - ٣ = ٠$ يساوى ....

(٥) اذا كان $\overrightarrow{أ} = (\frac{-١}{٢}، \frac{٣}{٤}، ك)$ متجه وحدة فإن قيمة ك = ... أو ....

(٦) اذا كان $\overrightarrow{أ} = (ك، -٣، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢، ٣، -ك)$ متعامدان فإن قيمة ك = ...

السؤال الثانى: أكمل:

(١) $(١ + \omega)^٤ + (١ + \omega^٢)^٤ + (\omega + \omega^٢)^٤ =$ ....

(٢) رتبة المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ -١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$ يساوى ....

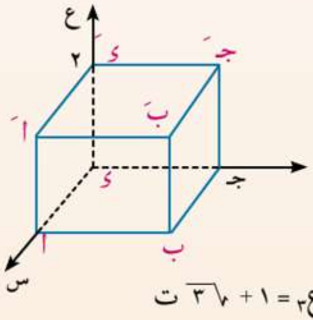
(٣) اذا كان $\overrightarrow{أ} = (٣، -٢، ك)$ ، $\overrightarrow{ب} = (١، م، ٢)$ وكان $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ فإن ك = ... ، م = ...

(٤) اذا كان قياس الزاوية التى يصنعها $\overrightarrow{أ} = (٢، ٤، ك)$ مع الأتجاه الموجب لمحور الصادات يساوى $٤٥°$
فإن ك = ...

(٥) إذا كان المستويان: س + ٢ص + ك ع = ٢، ٣ س - ص + ٢ ع + ٤ = ٠ متعامدان فإن ك = ...

(٦) فى الشكل المقابل أ ب جـ ى أَ بَ جـَ ىَ مكعب طول ضلعه الوحده

فإن $\overrightarrow{أبَ} \cdot \overrightarrow{بىَ} =$ ....



أجب عن الأسئلة الأتية

السؤال الثالث:

(١) اذا كان $ع_١ = ٢ (جا \frac{\pi}{٣} + ت حتا \frac{\pi}{٣})$ ، $ع_٢ = \sqrt{٢} (حا \frac{\pi}{٤} - ت حتا \frac{\pi}{٤})$ ، $ع_٣ = ١ + \sqrt{٣} ت$

أوجد العدد $ع = \frac{ع_١^٣ \times ع_٢^٤}{ع_٣^٥}$ على الصورة الأسية ثم أوجد الجذران التربيعيان للعدد ع على الصورةالمثلثية

(٢) اذا مر المستوى $٢أ\text{س} - ٣أ\text{ص} + ٤أ\text{ع} + ٦ = ٠$ بمنتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزى الكرتين $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ + ٦\text{س} - ٨\text{ص} - ٢\text{ع} = ١٣$ ، $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ - ١٠\text{س} + ٤\text{ص} - ٢\text{ع} = ٨$ فما قيمة أ؟

السؤال الرابع:

(١) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل المعادلات الآتية:

$\text{س} - ٢\text{ص} + ٢\text{ع} = ٢$ ، $٣\text{س} + ٤\text{ع} = ١٠$ ، $٦\text{ع} - \text{ص} = ٥$

(٢) أثبت أن الحد الخالى من س فى مفكوك $(\text{س}^٢ + \frac{١}{\text{س}^٣})^{٥ن}$ حيث $ن \in \text{ص}^+$ يساوى $\frac{\lfloor ٥ن}{\lfloor ٢ن \lfloor ٣ن}$

السؤال الخامس:

(١) أوجد قيمة ك التى تجعل للمعادلات: $ك\text{س} + \text{ص} + \text{ع} = ١$ ، $\text{س} + ك\text{ص} + \text{ع} = ١$

$\text{س} + \text{ص} + ك\text{ع} = ١$ عدد غير منتهى من الحلول.

(٢) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (-٤ ، ١ ، ١) على المستقيم $\frac{\text{س} + ٣}{١} = \frac{\text{ص} - ١}{\sqrt{٥}} = \frac{\text{ع} + ٢}{٢}$

الاختبار العاشر

أولًا: أجب عن سؤال واحد فقط مما يأتى:

السؤال الأول: أكمل:

(١) إذا كان $\text{س} = \frac{-١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$ حيث $\text{ت}^٢ = -١$ فإن القيمة العددية للمقدار $\text{س}^٨ + \text{س}^٤ + ٥ = $ ....

(٢) اذا كان $\lfloor ن$ ، $\lfloor ن-٢$ ، ن $\lfloor ٢-ن$ هى أطوال أضلاع مثلث فإن القيمة العددية لمحيط المثلث = ...

(٣) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (-٢، ك، -٣)$ يوازى المستقيم $\frac{\text{س} + ٢}{٤} = \frac{\text{ص}}{٨} = \frac{\text{ع} - ١}{٦}$ فإن ك = ...

(٤) قياس الزاوية التى يصنعها المتجه $\overrightarrow{أ} = (٣، ٤، \sqrt{١١})$ مع الأتجاه الموجب لمحور السينات يساوى ....

(٥) اذا كان المستوى $\text{س} - ٣\text{ص} + م\,\text{ع} = ٥$، المستوى $٣\text{س} + ك\,\text{ص} + ٦\text{ع} = ١٠$ متوازيان فإن ك × م = ...

(٦) طول العمود المحصور بين المستويين المتوازيين $٤\text{س} + ٦\text{ص} + ١٢\text{ع} + ١٨ = ٠$ ، $٤\text{س} + ٦\text{ص} + ١٢\text{ع} - ١٠ = $ ....

السؤال الثانى: اختر الاجابة الصحيحة:

(١) $١ - ٦\text{س} + \frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١}\text{س}^٢ - \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١}\text{س}^٣ + $ .... $+ \text{س}^٦ = ٦٤$ فإن س =

أ) -١ ب) ٣ ج) {-١، ٣} د) ٢

(٢) $\left(\frac{٥ - ٣\omega^٢}{٥\omega - ٣} - \frac{٢ - ٧\omega}{٢\omega^٢ - ٧}\right)^٢ = $

أ) ٣ ب) -٣ ج) ٣ت د) -٣ت

(٣) اذا كان المستقيمان: $\frac{\text{س} + ١}{٢} = \frac{\text{ص} - ٢}{٣} = \frac{\text{ع} - ٣}{٤}$ ، $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص} + ١}{٤} = \frac{\text{ع} - ١}{ك}$ متعامدان فإن ك =

أ) ٤ ب) -٤ ج) $\frac{٩}{٢}$ د) $-\frac{٩}{٢}$

٤ الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التى مركزها (٣، -٢، ١) وطول نصف قطرها = ٥ سم هى

أ (س + ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ٥ ب (س + ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ٢٥

جـ (س - ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ٢٥ د (س - ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = $\sqrt{٥}$

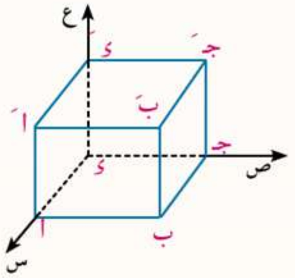
٥ قياس الزاوية المحصورة بين المستويين س + $\sqrt{٢}$ ص - ع = ٥ ، س - $\sqrt{٢}$ ص + ع = ١ يساوى

أ ٠° ب ٤٥° جـ ٩٠° د ١٣٥°

٦ **فى الشكل المقابل** أ ب جـ ء أَ بَ جـَ ءَ متوازى مستطيلات وكان أ (٤، ٠، ٠)، جـ (٠، ٩، ٠) ءَ (٠، ٠، ٧) فإن || $\overrightarrow{أجَ}$ || =

أ $\sqrt{١٤٦}$ ب $\sqrt{١١٤}$

جـ ٥ د $\sqrt{٢٠}$



أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الثالث:

١ فى مفكوك (٢س -٣)^{١٥} حسب قوى س التنازلية أوجد قيم س التى تجعل ١٣ ح$_{٣}$ + ١٠ ح$_{٤}$ + ح$_{٥}$ = صفر

٢ بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} س & س & ص+ع \\ ص & ع+س & ص \\ س+ص & ع & ع \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ص & ع & ٠ \\ س & ٠ & ع \\ ٠ & س & ص \end{vmatrix}$$

السؤال الرابع:

١ أثبت أن : $\left(\frac{١ + جا ى + ت جتا ى}{١ + جا ى - ت جتا ى}\right)^{ن}$ = حتا ن$(\frac{\pi}{٢} - ى)$ + ت حا ن$(\frac{\pi}{٢} - ى)$

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، -١ ، ٠) و يقطع المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (٢، ١، ١) + ك (١، ٢، -١) على التعامد

السؤال الخامس:

١ باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل مجموعة المعادلات الآتية:

$\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} + \frac{١}{ع} = ١$ ، $\frac{١}{س} - \frac{١}{ص} + \frac{٢}{ع} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} - \frac{٤}{ع} = \frac{٤}{٣}$

حيث س ، ص ، ع لا تساوى صفر

٢ أوجد المركبة الأتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أب}$ حيث أ (٢ ، ١ ، ٠) ، ب (٣، ١، $\sqrt{٣}$)

فى إتجاه المتجه $\overrightarrow{م}$ حيث $\overrightarrow{م}$ = (٣، ٢، ٢$\sqrt{٣}$)

اجابات التمارين

الوحدة الأولى : التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

إجابات تمارين (١ - ١)

(١) ج (٢) د (٣) ب (٤) د

(٥) أ (٦) ج (٧) أ (٨) ب

(٩) ب (١٠) ٤٠ (١١) ١٤ (١٢) ٢٥٢٠

(١٣) أ ٢٤٠١ ب ٨٤٠

(١٤) أ ٢٤ ب ٤٨ ج ٤٠

(١٥) أ ن = ٢ ر = ٨ ب ن = ٧ ر = ٣

ج ن = ٧ ر = ٤ د ر = ٢ ن = ٥

(١٦) ن = ٢٠ ، ر = ١٣ (١٧) $\frac{١٦}{٧}$ (١٨) ن = ١٦

(١٩) ر = ٤ ، ن = ٧ (٢٠) أقل قيمة للمتغير ن = ٥

(٢١) ر = ٢ ، ن = ١١ (٢٢) $\frac{٢٨}{٩}$ (٢٣) ر = ٤

(٢٤) س ∈ { ٠، ١، ٢، ٣، ...، ٣٠} ، ص = $\frac{١}{٢}$ ، ص = $\frac{-١}{٢}$

(٢٥) ن ∈ {٨، ٩، ١٠، ...} (٢٦) م + ن = ٢٠

(٢٧) أ ن = ٢ ب ن = ٢ ج ن = ٦

(٢٨) ر = ٨ ، ن = ٧٩

(٢٩) أ ن = ١٣ أو ن = ١٢ ب ر = ٥ ، ر = ٩

(٣٠) أ ر = ٤ ، ن = ١٤ ب ر = ٤ ، ن = ١٢

ج ر = ٢ ومنها ن = ١٠

د ن = ١٣ هـ ر = ١٠ ، ن = ١٠

(٣١) ٦ (٣٢) ١٠ (٣٣) ٢١٨٠٢٥

(٣٤) ١٢٦٠ (٣٥) ٣٠٤

(٣٦) أ ٤ ب ١٠ ج ٢٠

(٣٧) أ ٩ ب ٢٠ ج ٥٤

(٣٨) أ ٤٩٥ ب ٢٥٢ ج ٣٦٩

إجابات تمارين (١ - ٢)

(١) أ (٢) د (٣) د (٤) ج

(٥) ب (٦) د (٧) ب (٨) ج

(٩) أ (١٠) س = ١ س = -٣

(١١) أ ١,٠١٥١ ب ٠,٩٨٦ ج ٢,٠٠٣

د ٠,٣٢١

(١٢) س = $\frac{١}{٢}$ (١٣) اثبات

(١٤) أ ١٦ $س^{-٤}$ + ١٦ $س^{-٢}$ + ٦ + $س^{٢}$ + $\frac{١}{١٦}$ $س^{٤}$

ب $س^{٥}$ - ٥$س^{٣}$ + ١٠س - ١٠ $س^{-١}$ + ٥$س^{-٣}$ - $س^{-٥}$

ج ٢$س^{٤}$ + ٢٤ $س^{٢}$ + ٨

د ١٨٠س + ٤٨٠ $س^{٣}$ + ٦٤ $س^{٥}$

(١٥) ن = ٨ س = ± ٢ (١٦) ن = ١٤

(١٧) ٢ أ ب = ١ (١٨) $ح_{٧}$ = ٩٢٤ $س^{٦}$

(١٩) $ح_{٦}$ = -٢٣١ $س^{٧}$ $ح_{٧}$ = ٩٢٤ $س^{٤}$

(٢٠) ٨٤ س (٢١) س = $\frac{٢}{٣}$ (٢٢) $\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = \frac{١}{٢٠}$

(٢٣) س = ± $\frac{٨}{١٥}$

إجابات تمارين (١ - ٣)

(١) ج (٢) ج (٣) ج (٤) ج

(٥) ج (٦) ج (٧) د (٨) ب

(٩) ج (١٠) ج

(١١) $ع_{٩}$ = ٤٩٥ (١٢) $\frac{١٣٦٥}{١٢٨}$

(١٣) لايوجد حد مشتمل على $س^{-٦}$

(١٤) ٤٦٠٨ - ٥٣٧٦ المفكوك لايحتوى على $س^{٢}$

(١٥) ن = ١٥ (١٦) ١٩٢٠ (١٧) $^{٢ن}ق_{ن}$

(١٨) الحد الخالى من س = $^{١٦}ق_{٨}$

(١٩) عندما ر = ٣ نجد ك = ١ عندما ر = ٤ نجد ك = ٢

عندما ر = ٥ نجد ك = ٥ $\frac{٣}{١٠}$

(٢٠) أ = ٢ (٢١) أ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (٢٢) س = ± $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$

(٢٣) $ع_{٤}$ هو الحد الخالى من س = ٨٤

الحدان الأوسطان هما $ع_{٥}$ ، $ع_{٦}$ س = -١

(٢٤) س = $\frac{١}{٣}$ (٢٥) $\frac{٢١}{٥٥}$

إجابات تمارين (١ - ٤)

(١) ب (٢) ج (٣) د (٤) ب

(٥) أ $\frac{١٥}{٢س^{٤}}$ ب $\frac{س^{٤}}{٣}$ ج $\frac{٢٨ س^{٨}}{٤٥}$ د $\frac{١٠}{٦٣}$

(٦) $\frac{٤}{١١}$ (٧) ن = ٥ أ = ٢ ، ب = ٣

(٨) ن = ٥

(٩) ن = ٨

(١٠) $ح_٤$، $ح_٥$ متساويان وكل منهما له أكبر قيمة عددية في المفكوك

(١١) ن = ٨

اجابات التمارين العامة

(١) أ (٢) جـ (٣) د (٤) جـ

(٥) أ (٦) جـ (٧) د (٨) ب

(٩) جـ (١٠) جـ (١١) ب

(١٢) ر = ٣ ن = ٦ (١٣) ن = ١٠ م = ٤

(١٤) ر = ٤ ن = ١٠ (١٥) ن = ١٠ ر = ١

(١٦) ر = ٧ ن = ١١ (١٧) ر = ٤ ن = ١٠

(١٨) أ ١٥٣٠ ب ١١١ (١٩) ن = ٦ ر = ٥ ، ٣٥

(٢٠) ر = ٨ ن = ٧٩ (٢١) ر = ٥ أقل قيم ن = ٥

(٢٢) بالاشتقاق بالنسبة إلى س

بالتعويض عن س = ١ $ن \times ٢^{ن-١}$

(٢٣) أ بالتعويض عن س = ١ في الطرفين

ب بالتعويض عن س = -١   ٠

جـ بالتعويض عن س = ٣ $٤^{١٠}$

(٢٤) ن = ١٥ ر = ١٠ $ح_{١١}$ = ٣٠٠٣

(٢٥) ن = ٧ (٢٦) ن = ٢٩ $\underline{|١٠}$ = ٣٦٢٨٨٠٠

(٢٧) ن = ٩ (٢٨) الحدود هي $ح_{٢٠}$، $ح_{٢١}$، $ح_{٢٢}$ $^{٢٧}ق_{٩}$

(٢٩) ن = ١٠ ، م = $\frac{-١}{٣}$ $ح_٦$ = ٢٥٢

(٣٠) $ح_{١٥}$ هو الحد الخالي من س

$ق_٥$ = ١٤ $\frac{ح_{١٢}}{ح_{١١}} = \frac{٣}{٢}$

(٣١) س = $\frac{١}{٢}$ لا يوجد حد خالي من س

(٣٢) الحدود هي $ح_٥$ ، $ح_٦$، $ح_٧$ (٣٣) س = $\frac{٣}{٥}$

(٣٤) ٤٩٥ (٣٥) س = $\frac{٣}{٢}$ (٣٦) أ + ب $س^٢$ = ٠

(٣٧) ن = ٩ (٣٨) س = ± $\frac{١}{٢}$

(٣٩) ن = ١٠، س = $\frac{٥}{٦}$ (٤٠) ن = ١٢، جـ = ١

(٤١) ن = ٨ س = ± ١ ، ص = ± ٢

(٤٢) (١) ٩٢٤ $س^{-٦}$ (٢) $ح_٤ = {}^{١٢}ق_٣ (\frac{٢}{٣})^٦ س^٣$

(٤٣) ٤٠ (٤٤) ن = ٢٠ ، س = $\sqrt[٣]{٢}$

المفكوك لايشتمل على حد خالي من س

(٤٥) ر = ٤ ر = ٣ جـ = $\frac{٢}{٣}$

(٤٦) ر = ١٠ $ح_{١١} = {}^{١٥}ق_{١٠}$ $\frac{٢١}{٨٠}$

(٤٧) أ ر = ٦ ك = ٣ ر = ٧ ك = ٧ ب $\frac{٤}{٣٥}$

(٤٨) اثبات (٤٩) ر = ٢ ن = ٦ ص = $\frac{١}{\sqrt[٣]{٢}}$

(٥٠) أ = ± $\frac{\sqrt{١٠}}{٢}$ (٥١) $\frac{ح_٧}{ح_٦} = \frac{٣}{٢}$

(٥٢) $\frac{ح_٦}{ح_٥} = \frac{١}{٢٧ س^٣}$ عندما س = $\frac{١}{٣}$ $ح_٦ = ح_٥$

(٥٣) ر = ٦ س = $\frac{٣}{٢}$ (٥٤) $\frac{٢١}{٥٥}$

اجابات الاختبار التراكمي

(١) أ (٢) جـ (٣) ب (٤) جـ

(٥) جـ (٦) ن = ٢٥ س = ± $\frac{١}{٤}$

(٧) أ ن = ١٠ ب ر = ٢ $ح_٣$ = ٤٥

(٨) ن = ٢٥ م = $\frac{١}{١٠٠}$ (٩) أولًا: ١٠٥ ثانيًا: ٦١

(١٠) ن = ١٦ س = ± $\frac{٤}{٣}$

الوحدة الثانية : الأعداد المركبة

إجابات تمارين (٢ - ١)

(١) (٣، -٤) (٢) س

(٣) ٥ (٤) ١ (٥) -٥ (٦) ١

(٧) $\sqrt{٢}$ $هـ^{\frac{٣\pi}{٤}ت}$ (٨) ١٢٠°

(٩) ٤ (جتا (-٦٠°) + ت جا (-٦٠°))

(١٠) θ (١١) ٦٠° (١٢) π

(١٣) $ل_١ ل_٢$ ت (١٤) ١٨٠°

(١٥) ٢ (١٦) $هـ^{\frac{٣\pi}{٤}ت}$ (١٧) ٣٠٠°

(١٨) ١ (١٩) ٣(جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)

(٢٠) -θ

(٢١) أ ٥ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)

ب ٤ (جتا (-$\frac{٥\pi}{٦}$) + ت جا (-$\frac{٥\pi}{٦}$))

جـ $\sqrt{٢}$ (جتا (-$\frac{\pi}{٤}$) + ت جا (-$\frac{\pi}{٤}$))

د ٥ (جتا ١٢٦,٩° + ت جا ١٢٦,٩°)

هـ ٤ (جتا (-٤٠) + ت جا (-٤٠))

(٢٢) أ $\sqrt{٢}$ ، -$\frac{\pi}{٤}$ ب ٢ ، $\frac{\pi}{٦}$

جـ ٢ ، -$\frac{٣\pi}{٤}$ د قا٢٠° ، $\frac{\pi}{٩}$

(٢٣) ت   (٢٤) $\frac{١}{٢}$ هـ$^{\frac{\pi}{٢}ت}$ (٢٥) $\frac{١}{٢}$ هـ$^{-\frac{\pi}{٢}ت}$

(٢٦) أ $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت   ب $-\sqrt{٢} + \sqrt{٢}$ ت

ج $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢} - \frac{٣}{٢}$ ت

(٢٧) $\frac{١}{٢}$ هـ$^{\frac{٥\pi}{٢}ت}$ (٢٨) -٦٤

(٢٩) |ع| = ١   (٣٠) $-\sqrt{٣}$ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

(٣١) أ $\frac{\pi}{٢}$ ب $\frac{١٣}{١٢}\pi$ ج $\frac{١١}{٢١}\pi$ د π

(٣٢) جا = $\frac{-ت}{٢}$ (هـ$^{\theta ت}$ - هـ$^{-\theta ت}$)

إجابات تمارين (٢ – ٢)

(١) أ ٨ جتا$^{٤}\theta$ - ٨ جتا$^{٢}\theta$ + ١

ب ١٦ جا$^{٥}\theta$ - ٢٠ جا$^{٣}\theta$ + ٥ جاθ

(٢) أ ٢   ٢ت   -٢   -٢ت

ب ع$_{١}$ = ١ + $\sqrt{٣}$ ت   ع$_{٢}$ = -٢

ع$_{٣}$ = ١ - $\sqrt{٣}$ ت

ج ع$_{١}$ = ٢ت   ع$_{٢}$ = $-\sqrt{٣}$ - ت

ع$_{٣}$ = $\sqrt{٣}$ - ت

(٣) ع$_{١}$ = ٣ (جتا ٣٦° + ت جا ٣٦°)

ع$_{٢}$ = ٣ (جتا ١٠٨° + ت جا ١٠٨°)

ع$_{٣}$ = ٣٠٠

ع$_{٤}$ = ٣ (جتا (-١٠٨°) + ت جا (-١٠٨°))

ع$_{٥}$ = ٣ (جتا (-٣٦°) + ت جا (-٣٦°))

(٤) ع$_{١}$ = $\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{\pi}{١٢}ت}$ ع$_{٢}$ = $\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{٧\pi}{١٢}ت}$

ع$_{٣}$ = $\sqrt{٢}$ هـ$^{-\frac{١١\pi}{١٢}ت}$ ع$_{٤}$ = $\sqrt{٢}$ هـ$^{-\frac{٥\pi}{١٢}ت}$

(٥) أ ع$_{١}$ = $\sqrt{٣}$ - ت   ع$_{٢}$ = $-\sqrt{٣}$ + ت

ب ع$_{١}$ = $\sqrt[٤]{٢}$ (جتا ($-\frac{\pi}{٨}$) + ت جا ($-\frac{\pi}{٨}$))

ع$_{٢}$ = $\sqrt[٤]{٢}$ (جتا ($-\frac{٧\pi}{٨}$) + ت جا ($-\frac{٧\pi}{٨}$))

ج ع$_{١}$ = ٢ + ٢ت   ع$_{٢}$ = -٢ - ٢ت

د ٤ + ت ، -٢ - ت   هـ ± (٣ - ٢ت)

(٦) ع$_{١}$ = ٢   ع$_{٢}$ = ٢ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

ع$_{٣}$ = ٢ (جتا (١٢٠°) + ت جا (-١٢٠°))٢

(٧) ع$_{١}$ = جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$

ع$_{٢}$ = جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$

ع$_{٣}$ = جتا ($-\frac{٣\pi}{٤}$) + ت جا ($-\frac{٣\pi}{٤}$)

ع$_{٤}$ = جتا ($-\frac{\pi}{٤}$) + ت جا ($-\frac{\pi}{٤}$)

(٨) عند ك = ٠ المقدار = ٢ + ٢ ت

عند ك = ١ المقدار = -٢ - ٢ت

(٩) ع$_{١}$ = ٢هـ$^{\frac{\pi}{٨}ت}$ ع$_{٢}$ = ٢هـ$^{-\frac{٧}{٨}\pi ت}$

(١٠) ١٨ - ٢٦ ت ، -١٨ + ٢٦ ت

(١١) جتا$^{٤}\theta$ = $\frac{١}{٨}$ [جتا ٤θ + ٤ جتا ٢θ + ٣]

إجابات تمارين (٢ – ٣)

(١) $-٩\omega^{٢}$ (٢) ٩   (٣) ١   (٤) -١

(٥) ٤   (٦) -٢   (٧) -٣٧   (٨) -١

(٩) $\omega^{٢}$ (١٠) ٢   (١١) (أ - ب)٢

(١٢) ١   (١٣) $\pm\sqrt{٣}$ ت

(١٤) (١،١)   (١٥) ٣   (١٦) $-\omega^{٢}$

(١٧) ١   (١٨) ٦

(٢٠) أ ٢   ب -١   ج -١   د $\frac{-٢٧}{٤٩}$

هـ ت

(٢١) صفر   (٢٢) س^{٢} - س + ١ = ٠

(٢٣) -٢ت   الجبرية

ع = ٢ (جتا ($-\frac{\pi}{٢}$) + ت جا ($-\frac{\pi}{٢}$))   المثلثية

٢هـ$^{-\frac{\pi}{٢}ت}$ الأسية

$\sqrt{٢}$ (جتا ($-\frac{\pi}{٤}$) + ت جا ($-\frac{\pi}{٤}$))

$\sqrt{٢}$ (جتا ($-\frac{٣\pi}{٤}$) + ت جا ($-\frac{٣\pi}{٤}$))

(٢٤) ن = ٣ك حيث ك ∋ ص

(٢٥) أ ω + ١   ب ٣

اجابات التمارين العامة

(١) ١   (٢) ٢ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)

(٣) θ - ٩٠°   (٤) - ت + ω

(٥) -١   (٦) ٦٠°   (٧) أ   (٨) ب

(٩) د   (١٠) ب   (١١) ج   (١٢) ج

(١٣) ج   (١٤) ب   (١٥) ١   (١٦) ب

(١٧) ب

(١٨) (أ) -١ (ب) ٣ - ٣ت (ج) ٢ + ٢ت

(١٩) (أ) $ع_١ = ٣\sqrt{٣}$ (جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠)

(ب) $-ع_٢ = \sqrt{٣}$ (جتا ١٠٥ + ت جا ١٠٥)

(ج) $ع_١ ع_٢$ = ٩ (جتا (-١٠٥) + ت جا (-١٠٥))

(د) $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = ٣ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

(٢٠) (أ) $ع_١$ = ٧ هـ ت (ب) $ع_٢ = ٥ هـ^{-\frac{\pi}{٢}ت}$

(ج) $ع_٣ = \frac{١}{٢} هـ^{\frac{\pi}{٢}ت}$ (د) $ع_٤ = \sqrt{٧} هـ^{-٠,٧١ت}$

(هـ) $ع_٥ = ٤ هـ^{\frac{\pi}{٤}ت}$

(٢١) مقياس ع = ٢ جتا $\frac{\theta}{٢}$ سعة ع = $\frac{\theta}{٢}$

(٢٢) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

اجابات الاختبار التراكمى

(١) (أ) الأول (ب) الثالث (ج) الرابع

(٢) ٣، ١

(٣) (أ) ٢، $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\sqrt{٢}$، $\frac{٣\pi}{٤}$

(ج) ٤، $\frac{\pi}{٢}$ (د) ٥، π (هـ) ٥، -٠,٩٣ ء

(٤) ت جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$

جتا ($\frac{-٣\pi}{٤}$) + ت جا ($\frac{-٣\pi}{٤}$)

(٥) -٥ + ٢ت

(٦) $٦هـ^{\frac{\pi}{٣}ت}$ ٢ (جتا $\frac{\pi}{٩}$ + ت جا - $\frac{\pi}{٩}$)

(جتا $\frac{٧\pi}{٩}$ + ت جا - $\frac{٧\pi}{٩}$)

٢(جتا $\frac{-٥\pi}{٩}$ + ت جا - $\frac{-٥\pi}{٩}$)

(٧) $\frac{١}{٢}$ (-١ - $\sqrt{٣}$ ت)

(جتا (- $\frac{\pi}{٣}$) + ت جا (- $\frac{\pi}{٣}$)

(جتا ($\frac{٢\pi}{٣}$) + ت جا - $\frac{٢\pi}{٣}$)

(٨) $\sqrt{٦} هـ^{\frac{\pi}{١٢}ت}$ ع = $\sqrt[٤]{٦}$ (جتا ($\frac{\pi}{١٢}$ + ٢كπ)

+ ت جا ($\frac{\pi}{١٢}$ + ٢كπ))

حيث ك = ٠، ١، ٢، ٣

(٩) $٢ هـ^{\frac{-٢\pi}{٣}ت}$

(١٠) $|\frac{١+ع}{١-ع}|$ = ظتا $\frac{\theta}{٢}$ سعة = $\frac{\pi}{٢}$

(١١) ع = ω

$ع_١ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)

الجذران هما $\frac{١}{\sqrt[٤]{٣}}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

$\frac{١}{\sqrt[٤]{٣}}$ (جتا $\frac{-٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{-٣\pi}{٤}$)

الوحدة الثالثة : المحددات و المصفوفات

إجابات تمارين (٣ - ١)

(١) أ (٢) ب (٣) أ (٤) أ

(٥) أ (٦) ب (٧) د (٨) د

(٩) د (١٠) ج (١١) -٤٢٠

(١٥) -٢ (١٦) س = -١

(١٧) $س_١ = \frac{٣ + \sqrt{٥}}{٢}$ ، $س_٢ = \frac{٣ - \sqrt{٥}}{٢}$

(١٨) س = ١

(٢٤) صفر (٢٥) صفر

إجابات تمارين (٣ - ٢)

(١) ب (٢) أ (٣) ج (٤) ج

(٥) (أ) ٥ -٤ (ب) ١

(ج) ٣، س = $\frac{-٢٣}{٥}$

(٦) (أ) $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\frac{١}{٩}\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

(ج) $\frac{١}{١}\begin{pmatrix} \text{جا}\,\theta & \text{جتا}\,\theta \\ -\text{جتا}\,\theta & \text{جا}\,\theta \end{pmatrix}$

(د) $\frac{١}{١}\begin{pmatrix} \text{قا}\,\theta & -\text{طا}^٢\theta \\ -١ & \text{قا}\,\theta \end{pmatrix}$

(هـ) $أ^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٩} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٩} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{٩} \end{pmatrix}$ (و) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

إجابات تمارين (٣ - ٣)

(١) د (٢) أ (٣) ب (٤) أ

(٥) أ (٦) ج (٧) ب (٨) ب

(٩) أ (١٠) ب

(١١) (أ) س = ٨ ، ص = -١٢

(ب) أ = ٢ ، ب = ١ (ج) جـ = ٥ ، ء = ٢

(د) ب = ٧ ، جـ = ٠ ، ء = -١

(هـ) س = ١ ، ص = -١ ، ع = ٢

(و) س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣

(١٢) (أ) س = $\frac{-١٣}{٣}$ ص = $\frac{٣}{٣}$ = ١ ع = $\frac{٢٣}{٣}$

(ب) س = ١ ص = ١ ع = -٢

(ج) س = -٢ ص = ١ ع = ١

(د) س = ٢ ص = ١ ع = ١

(١٣) اثبات نظرى

(١٤) (أ) س = ل ، ص = ل ، ع = -ل

(ب) س = -٢ ل ، ص = ع = ل

(ج) س = ل ، ص = ل ، ع = -ل

اجابات التمارين العامة

(١) صفر (٢) {١٠} (٣) صفر (٤) صفر

(٥) ± ٣ (٦) $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٥ & ١٠ \end{pmatrix}$ (٧) ١

(١٤) ك = -١ (١٥) ك = -٤

(١٦) (٢، -١، ٣) (١٧) (-٤، ٣، ٢)

(١٨) الحل العام = {(-٢ك، ك، ٠)}

(١٩) (١، -٢، ٢) (٢٠) (١، -١، ٢)

(٢١) المعادلات ليس لها حل

اجابات الاختبار التراكمى

(١) ٧٠ (٢) $\begin{pmatrix} ٤ & -١٧ \\ -١ & ٦ \end{pmatrix}$ (٣) ±٤

(٤) ٧ (٥) صفر (٦) ح - {١٣ ، -١}

(٧) ١ (٨) ٣ (١٠) ر (أ) = ٢

(١٢) (١ ، ٢ ، ٣)

(١٤) المعادلات لها حل وحيد

(١٦) (أ) أ غير منفردة (ب) أ منفردة

(ج) أ غير منفردة (د) أ منفردة

ثانيًا: الهندسة الفراغية

الوحدة الأولى : الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

إجابات تمارين (١ - ١)

(١) صفر (٢) س ع ، ص = صفر

(٣) (٠،٤،٦)، (٦، ٠، ٢) (٤) ($\frac{١}{٢}$ ، -٢، ٣)

(٥) (س-٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع - ٤)^{٢} = ٢٥

(٦) ٢ (٧) ٥ (٨) (١، $\frac{٣}{٢}$، ٦)

(٩) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٢٥

(١٠) (س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع - ٤)^{٢} = ١٦

(١١) (أ) ٢$\sqrt{١٣}$ (ب) $\sqrt{١٣}$ (ج) ٥

(١٢) (أ) ٣$\sqrt{٥}$ وحدة مربعة (ب) ٢$\sqrt{٢١}$ وحدة مربعة

(١٣) (٣، ٠، ٠)، (٣، ٣، ٠)، (٣، ٠، ٣)

(٠، ٣، ٠)، (٠، ٣، ٣)، ((٠، ٠، ٣)

(٣، ٣، ٣)، (٠، ٠، ٠)

(١٤) ٣±٢$\sqrt{٦}$

(١٥) (أ) ($\frac{٥}{٢}$، $\frac{-١}{٢}$، $\frac{٣}{٢}$) (ب) ($\frac{-٩}{٢}$، $\frac{٩}{٢}$، $\frac{١٣}{٢}$)

(١٦) أ(-٦، ١٠، -١)

(١٧) (أ) (س-٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع - ٢)^{٢} = ٧

(ب) ($\frac{٣}{٢}$، ١، -٢)

(س - $\frac{٣}{٢}$)^{٢} + (ص + ٦)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ٤٢

(ج) (س-١)^{٢} + (ص + ٦)^{٢} + (ع-١)^{٢} = ٤٢

(١٨) (أ) المركز = (٠، ٠، ٠) ، نق = ٣

(ب) المركز = (١ ، -٢، ٠) ، نق = $\sqrt{٥}$

(ج) المركز = ($\frac{١}{٢}$، $\frac{٣}{٢}$، ١) ، نق = ١

(١٩) (س - ٣)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ٩

(٢٠) (١، ٠، ٢) (٢١) ٤ وحدة طول

(٢٢) ع = ٢ (٢٣) حل زياد

إجابات تمارين (١ - ٢)

(١) $\sqrt{٢٩}$ (٢) $\overrightarrow{س}$ - $\overrightarrow{ص}$ + ٤ $\overrightarrow{ع}$

(٣) ($\frac{٤}{\sqrt{٢٩}}$، $\frac{-٣}{\sqrt{٢٩}}$، $\frac{٢}{\sqrt{٢٩}}$)

(٤) ٥٧" ٤١' ٣٦° (٥) ٩٠°

(٦) ±٢ (٧) ٨٢,٣٥٥°

(٨) - $\overrightarrow{س}$ - ٦ $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$ (٩) ($\frac{-٢}{٣}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{٢}{٣}$)

(١٠) (أ) (٦، -٥، ١) (ب) (٨، -٩، ٢)

(ج) (٢، -٢، ٣)

(١١) (أ) (٤، -٢، ٨) (ب) (-٣، $\frac{-١٣}{٢}$، $\frac{١٧}{٢}$)

(ج) (-٢، -١٩، ٢٧)

(١٢) (أ) $\sqrt{٥}$ (ب) ٣ (ج) ١ (د) $\sqrt{١٧}$

(١٣) اثبات (١٤) (-١٤، ٧، ١٤)

(١٥) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٠، ص ، ع)

(١٦) || $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ || ≥ || $\overrightarrow{\text{أ}}$ || + || $\overrightarrow{\text{ب}}$ ||

(١٧) ± $\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$ ($\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$)

إجابات تمارين (١ - ٣)

(١) صفر (٢) $\overrightarrow{\text{س}}$ (٣) ٢ (٤) متعامدان

(٥) متوازيان (٦) ١٤٢,١٢٥°

(٧) ٣٩ (٨) $\overrightarrow{\text{ع}}$ (٩) -٧ (١٠) [-١، ١]

(١١) ٥٧,٠٢° (١٢) ٣

(١٣) أ ١٠ ب -٢٨ ج صفر

(١٤) أ ٣٢,٥١° ب ٩٨,٧° ج ٩٠°

(١٥) $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٧$\overrightarrow{\text{ص}}$ - ٩$\overrightarrow{\text{ع}}$ ب ١٠$\overrightarrow{\text{س}}$ - ٥$\overrightarrow{\text{ص}}$ - ٣$\overrightarrow{\text{ع}}$

ج ٢٤$\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{\text{ى}}$

(١٦) أ ١٤٤ ب ١٤٤ ج ١٤٤ د ٢٨٨

هـ صفر و ١٤٤

(١٧) ($\frac{٧}{\sqrt{٧٥}}$ ، $\frac{٥}{\sqrt{٧٥}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٧٥}}$)

(١٨) أ ١٦,٧١٨٣ وحدات ب $\frac{٥}{٢}$ $\sqrt{١٩}$

(١٩) أ ٥ ب $\sqrt{٨٠}$

(٢٠) ٩ وحدات

(٢١) أ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ غير متعامدان

$\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ غير متوازيان

ب $\overrightarrow{\text{هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و}}$ غير متعامدان

$\overrightarrow{\text{هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و}}$ غير متوازيان

ج $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ غير متعامدان

$\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيان

اجابات التمارين العامة

(١) س ع ، ص = ٠

(٢) أ (٦، ٨، ٠) ب (٠، ٨، ٠)

ج ٥٣,١٣°، ٣٦,٨٧°، ٩٠°

(٣) (٥، -٣، ٢) (٤) ٧ أو -١

(٥) $\frac{-٢}{٣}$، -١٢ (٦) ٤٥°

(٧) ص = ٠ (٨) س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٤

(٩) (٤، ١، -$\frac{١}{٢}$) (١٠) صفر

(١١) ($\frac{٣}{٥}$، $\frac{-٤}{٥}$، ٠) (١٢) ك^٢ + هـ^٢ + و^٢ = ١

(١٣) صفر (١٤) محور ص

(١٥) اثبات (١٦) (٠، ٠، ٣) ٣

(١٧) (٣، ١، -٧) (١٨) ($\frac{١}{٣}$، $\frac{-٢}{٣}$، $\frac{٢}{٣}$)

(١٩) ٣١,٩٦° ٦,٥$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢,٢٥٦٨$\overrightarrow{\text{ص}}$ + ١١,٠٢٩٢$\overrightarrow{\text{ع}}$

(٢٠) $\sqrt{١٤}$

(٢١) || $\overrightarrow{\text{أ}}$ || = || $\overrightarrow{\text{ب}}$ || = ١ أى θ = ٩٠°

(٢٢) أ ٣٦ ب -٣٦ ج صفر

(٢٣) -٢٣ (٢٤) -٤٠٠ جول

(٢٥) أ اثبات ب اثبات

اجابات الاختبار التراكمى

(١) ٤ (٢) -٣ (٣) (٢، $\frac{١}{٢}$، ١)

(٤) أ (٠، ٨، ٤) ب (٠، ٠، ٤)

(٥) (س-١)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع + ١)^٢ = ١٣

(٦) (-٣، -٣، ١٣) (٧) ($\frac{٥}{\sqrt{٣٨}}$، -$\frac{٢}{\sqrt{٣٨}}$، $\frac{٣}{\sqrt{٣٨}}$)

(٨) ٣ (٩) ٥ (١٠) -٣

(١١) $\frac{١٨}{٥}$ (١٢) ٩٠° (١٣) ٩ وحدة مربعة

(١٤) س^٢ + (ص-٤)^٢ + ع^٢ = ١٦

(١٥) $\sqrt{١٤}$ $\sqrt{٢٧}$

(١٦) ±٢١ ($\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$)

(١٧) (-٢٤، ٤٨، ٣٦)

(١٨) أ (١، -١١، -٥) ب (٦، -٦٦، -٣٠)

ج (-٢، ٢٢، ١٠)

(١٩) ($\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$)

(٢٠) θس = ٦٤,٨٩٦° θص = ١٢٤,٤٥°

θع = ٤٥°

الوحدة الثانية : الخطوط المستقيمة والمستويات في الفراغ

إجابات تمارين (٢ - ١)

(١) $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢، -١، ٣) + ك (-١، ٤، ٢)

(٢) ٩٠° (٣) ٦٠° (٤) $\frac{١}{\sqrt{١١}}$

(٥) (٢، -٢، ١)

(٦) أ $\frac{١}{\sqrt{١٤}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{١٤}}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{١٤}}$

ب $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٧) أ س = ٤ + ٢ك ، ص = -٢ + ك ، ع = ٥ -ك

$\frac{س - ٤}{٢} = \frac{ص + ٢}{١} = \frac{ع - ٥}{-١}$

ب س = ٣ + ٢ك ، ص = -١ - ك ، ع = ٥ + ك

$\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ص + ١}{-١} = \frac{ع - ٥}{١}$

جـ س = ٣ + ٣ ك، ص = -٢ - ٦ك ، ع = - ك

$\frac{س - ٣}{٣} = \frac{ص + ٢}{-٦} = \frac{ع}{-١}$

د س = ٣ + ك، ص = ٢ + ك ، ع = ٥ + ك

س - ٣ = ص - ٢ = ع - ٥

(٨) $\overrightarrow{ر}$ = (٣، -٢، ٢) + ك (١، ٤، -٣)

(٩) أ $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، -٢، ١) + ك (-١، ١، -٢)

ب $\overrightarrow{ر}$ = (٨، ١، ٤) + ك (٤ ، ١ ، ١)

جـ $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ١ ، -٢) + ٢ك (-١٩، -١١، ٤)

(١٠) أ ٤١ //٣٠ /٦٠°   ب ٣٣ //٤١ /٥٣°

جـ ٣٠ //٢ /٨٤°

(١١) أ $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$

ب $أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + جـ_١ جـ_٢$ = صفر

(١٢) $\overrightarrow{ر}$ = (١، -١ ، ٠) + ك (٥ ، -١، -١)

(١٣) ن = ٧ ، ($\frac{٢٣}{٥}$ ، $\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{٤١}{٥}$)

إجابات تمارين (٢ – ٢)

(١) جـ   (٢) جـ   (٣) جـ

(٤) ب   (٥) جـ   (٦) ب

(٧) ٢س - ٣ص + ٤ ع = ٢١

أ لاتقع   ب $\overrightarrow{ى}$ لايوازى المستوى

(٨) أ (٣، ٠، ٠)   ب (-١، -٢، ٠)

جـ (٢، ١، ٣)، (-١، ٢، ١)، (-٤، ٣، ٠)

د (١، ١، ١)، (٠، ٢، ٢)، (٢، ٠، ٠)

(٩) س + ٢ص - ٣ع = ٠

(١٠) ٤س + ١٠ ص - ٧ ع = -٢

(١١) - ٤ س - ١٠ ص + ٧ ع = ٢

(١٤) أ ٢س + ٣ص + ٥ع = ٢٧

ب -٢س + ٤ص -ع + ٤ = ٠

جـ - س + ٣ ص + ٢ ع = ٩

(١٥) (٤، ٢، ٣)

(١٦) (١٠، ٥، ٤). $\overrightarrow{ر}$ = ٢٠ الصورة المتجهة

(١٧) أ ع = ٠   ب ع = ٢

جـ ص = ٠ ، ص = ٥ ، س = ٠

(١٨) ٩س + ١٧ص + ١٦ع + ٢٣ = ٠

(١٩) أ ∴ θ = ٧٨,٥٧٨°   ب θ = ٦٣,٠٧°

جـ θ = ٥٩,٥٣°

(٢٠) أ = (-١، ٢، ١)   ب $٢\sqrt{٦}$

د المعادلة المتجهة لخط التقاطع

$\overrightarrow{ر}$ = (٠، $\frac{-١}{١٩}$ ، $\frac{-١٧}{١٩}$) + ك (١٩ ، -٩ ، ٣٧)

(٢١) أ ٣ص + ٤ ع - ٢٠ = ٠

ب س + ٢ص + ٢ع - ١٢ = ٠

جـ ف = ٥   ط = ٢

د المعادلة المتجهة لخط التقاطع

$\overrightarrow{ر}$ = (٢، ٠، ٥) + ك (-٢، ٤، -٣)

هـ $و_١$ = -١٢ $و_٢$ = ٣

إجابات التمارين العامة

(١) ب   (٢) أ   (٣) جـ   (٤) جـ

(٥) جـ   (٦) جـ   (٧) جـ   (٨) ب

(٩) د   (١٠) د   (١١) $\frac{\sqrt{٣٧٠}}{١٠}$

(١٣) النقطة (١، -٢، ٧)   (١٤) (٢، -١، ٢)

(١٥) (-٢، ٤، ٢)   (١٦) طول العمود = $\frac{٢١}{٦}$

اختبار تراكمى

(١) ٦٠°   (٢) $\frac{\sqrt{٣٠}}{٦}$

(٣) س = -١ + ٢ك، ص = -ك، ع = ٣ - ٣ك

(٤) ٦٠°   (٥) ٥س + ٢ص - ٣ع - ١٩ = ٠

(٦) ٢,٥   (٧) (-١، ٢، ٠)   (٨) جـ

(٩) جـ (١٠) أ (١١) جـ

(١٢) جـ

(١٣) أ $\frac{\text{س}-١}{٥} = \frac{\text{ص}-٣}{٤} = \frac{\text{ع}-٩}{٢}$

ب $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}-٢}{-١} = \frac{\text{ع}}{٤}$

(١٤) أ ٥٠,١° ب ٤٥°

(١٥) ١٠س - ٢٢ص + ١٩ع = ٤٩

(١٦) ٥٧,٤٥٦

إجابات الاختبارات العامة

إجابة الاختبار الأول

س١

(١) د (٢) أ (٣) د (٤) ب

(٥) أ (٦) د (٧) ٢س - ٣ص + ٤ع = ٢١

س٢

(١) -٦٠٤٨ (٢) {٢}

(٣) ٦ (٤) (٨، -٥، -٦)

(٥) $(\text{س}-٢)^٢ + (\text{ص}+٣)^٢ + (\text{ع}-١)^٢ = ٢٠$

(٦) $\frac{\text{س}-٢}{٣} = \frac{\text{ص}+١}{-١} = \frac{\text{ع}-٤}{٢}$

س٣

(١) الحد الخالى من س سكون $\text{ح}_٦ = ٣٠٧٥٠٧٢$

(٢) س = -٣ + ١٢ ك ، ص = $\frac{١}{٢}$ + ١٥ ك

ع = $-\frac{٢}{٣}$ + ٨ ك

س٤

(١)

$$\begin{pmatrix} ٦٨ & -٣١ & -٥ \\ ٤١ & -١٩ & -٣ \\ -١٣ & ٦ & ١ \end{pmatrix}$$

(٢) $\text{ع}_١^{\frac{١}{٢}} = ٢\left(\text{جتا}\left(-\frac{\pi}{٦}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{٦}\right)\right)$

$\text{ع}_٢^{\frac{١}{٢}} = ٢\left(\text{جتا}\left(\frac{٥\pi}{٦}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{٥\pi}{٦}\right)\right)$

س٥

(١) (س ، ص، ع) = (١، ٢، ٣)

(٢) (س، ص، ع) = $(٢، -\frac{٥}{٢}، \frac{٥}{٢})$

إجابة الاختبار الثانى

س١

(١) جـ (٢) د (٣) أ (٤) أ

(٥) ب (٦) أ

س٢

(١) ω (٢) صفر (٣) $\frac{٨}{٣}$

(٤) صفر أو $\frac{١}{٢}$ (٥) -٢ (٦) -٣٣

س٣

(١) ٢٢٠ (٢) هـ = ٣٠°

س٤

(١) ر(أ) = ٣ = ن (س، ص، ع) = (٢، -١، ١)

(٢) $= \frac{١}{٢}\left(\text{جتا}\left(-\frac{\pi}{٢}\text{ت}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{٢}\text{ت}\right)\right)$

$٢\left(\text{جتا}\left(-\frac{\pi}{٢}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{٢}\right)\right)$

$\sqrt{٢}\left(\text{جتا}\left(-\frac{٣\pi}{٤}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{٣\pi}{٤}\right)\right)$

س٥

(٢) ١٠

إجابة الاختبار الثالث

س١

(١) جـ (٢) ب (٣) أ (٤) د

(٥) ب (٦) أ

س٢

(١) $-\frac{\pi}{٦}$ (٢) ١ (٣) ٣ (٤) ٥

(٥) -١٠,٥ (٦) ١٢

س٣

(١) ن = ٦ ، م = ٣ ، أ = ٢٤٣

(س، ص، ع) = (ك ، -ك ، -ك)

س٤

(١) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} - ١\right) - \frac{\sqrt{٢}}{٢}\text{ت}$

(٢) طول العمود = صفر

س٥

(٢) (-٤، -٨، -٦) ، (-٤، ٨، -٦) ، -١٢

إجابة الاختبار الرابع

(١) ب (٢) أ (٣) د (٤) جـ

(٥) أ   (٦) جـ

س٢

(١) -٤٠   (٢) ٢   (٣) (-٤، ٦، -١)

(٤) ١٠٠   (٥) $(\frac{٢}{٥}، \frac{٣}{٥}، \frac{٢\sqrt{٣}}{٥})$

(٦) $\sqrt{١٠}$

س٣

(١) ح٣ هو اكبر حد وقيمته $^{٦}ق_{٢}$ $(٣)^{٤}$ $(٢)^{٢}$ = ٤٨٦٠

(٢) ١٦ وحدة٣

س٤

(١) $ع_{١} = \sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

$ع_{٢} = \sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$)

$ع_{٣} = \sqrt{٢}$ (جتا $\frac{-٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{-٣\pi}{٤}$)

ع = $\sqrt{٢}$ (جتا(- $\frac{\pi}{٤}$) + ت جا(- $\frac{\pi}{٤}$)

(٢) أ = $\sqrt{١٤}$ ، ب - $\frac{\sqrt{٢}}{١٠}$ (٤، ٥، ٣)

س٥

(٢) جتا (- $\frac{٧}{١٨}\pi$) + ت جا (- $\frac{٧}{١٨}\pi$)

الجذر الأول = جتا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$

الجذر الثانى = جتا $\frac{٥\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٦}$

الجذر الثالث = جتا (- $\frac{٥\pi}{٦}$) + ت جا (- $\frac{٥\pi}{٦}$)

إجابة الاختبار الخامس

س١

(١) ب   (٢) د   (٣) أ   (٤) ب

(٥) د   (٦) جـ

س٢

(١) ١٣٣   (٢) ٢٠   (٣) $\frac{١}{٩}$ (٤) ٣

(٥) (س - ٣)٢ + (ص - ٤)٢ + (ع + ٥) ٢ = ٩

(٦) $\overleftarrow{ر}$ = (٢، -١، ٤) + ك (٤، ٧، ١)

س٣

(١) ر = ٦   (٢) ك = ٧ ، ك = -١

س٤

(١) (س ، ص، ع) = ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١٠}{٣}$ ، -٣)

(٢) $ع_{١}^{\frac{١}{٣}}$ = ٢ هـ $^{-\frac{\pi}{٦}ت}$ $ع_{٢}^{\frac{١}{٣}}$ = ٢ هـ $^{-\frac{\pi}{٢}ت}$

$ع_{٣}^{\frac{١}{٣}}$ = ٢ هـ $^{-\frac{٥}{٦}\pi ت}$

س٥

(٢) ١١π

إجابة الاختبار السادس

س١

(١) جـ   (٢) أ   (٣) جـ   (٤) جـ

(٥) د   (٦) ب

س٢

(١) ٢٤٣   (٢) ٣   (٣) (٣، ٠، ٢)

(٤) ١ أو - $\frac{١٣}{٥}$ (٥) -٥   (٦) -٤١

س٣

(١) ن = ١٩ أو ن = ٨

(٢) $(س - ١)^{٢}$ + $(ص - ٢)^{٢}$ + $(ع - ١)^{٢}$ = ٣

س٤

(١) (س، ص، ع) = (٢، ١، ١)

(٢) $ع^{\frac{١}{٢}}$ = جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$

$ع^{\frac{١}{٢}}$ = جتا (- $\frac{٣\pi}{٤}$) + ت جا(- $\frac{٣\pi}{٤}$)

س٥

(٢) $\frac{س - ٢}{٥} = \frac{ص - ١}{٢} = \frac{ع + ٣}{٣}$

إجابة الاختبار السابع

س١

(١) ب   (٢) جـ   (٣) أ   (٤) جـ

(٥) د   (٦) أ

س٢

(١) ١   (٢) ٣   (٣) ٤٥°   (٤) ٨

(٥) -١   (٦) $\sqrt{١٥٧}$

س٣

(١) $\sqrt{ع}$ = هـ $^{-\frac{\pi}{٣٦}ت}$ ، $\sqrt{ع}$ = هـ $^{-\frac{٣٥}{٣٦}\pi ت}$

(٢) س = ١٢٥

س٤

(١) ن = ١٨ ، س = ± $\frac{١}{٣}$

س٥

(١) س = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ص = ± $\frac{١}{٢}$

ع = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٢) نقطة التقاطع (٢، ٢، ٢)

إجابة الاختبار الثامن

س١

(١) ١، $\frac{١}{١٠}$ (٢) ٥ (٣) ٩٠° (٤) -١٦

(٥) (س - ٥)^{٢} + ص^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ١٤ (٦) ١١ أو -١

س٢

(١) أ (٢) ب (٣) د (٤) أ

(٥) ب (٦) أ

س٣

(١) س = ١ ، ص = ٢ ، ص = -١ (٢) (٢، $\frac{-٥}{٢}$، $\frac{٥}{٢}$)

س٤

(١) ع$^{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا ٠° + ت جا ٠°)

ع$^{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا π + ت جا π)

(٢) ر(أ) = ٢ ر(أ) < عدد المجاهيل

س٥

(١) $\frac{١٥}{١١٢}$ (٢) ك = ١٠ أو ك = -٤

إجابة الاختبار التاسع

س١

(١) ١٠ (٢) ±٢ (٣) $\frac{\sqrt{٢}}{٥}$ (٤) ٣

(٥) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ أو $\frac{-\sqrt{٣}}{٤}$ (٦) ٩

س٢

(١) صفر (٢) ٣ (٣) ٦، $\frac{-٢}{٣}$ (٤) ±٢$\sqrt{٣}$

(٥) $\frac{-١}{٢}$ (٦) ١٢٠°

س٣

(١) ع$^{\frac{١}{٢}}$ = جتا (- $\frac{\pi}{١٢}$) + ت جا (- $\frac{\pi}{١٢}$)

ع$^{\frac{١}{٢}}$ = جتا ($\frac{١١}{١٢}\pi$) + ت جا ($\frac{١١\pi}{١٢}$)

(٢) أ = -٢

س٤

(١) س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ١

س٥

(١) ك = ١ (٢) $\frac{\sqrt{٣٠}}{٢}$

إجابة الاختبار العاشر

س١

(١) ٤ (٢) ٥ (٣) -٤

(٤) ٥٦,٤٤° (٥) -١٨ (٦) $\frac{٩}{٧}$

س٢

(١) جـ (٢) ب (٣) د

(٤) جـ (٥) جـ (٦) أ

س٣

(١) م.ج = {٠، $\frac{١}{٢}$، $\frac{٩}{٢}$}

س٤

(٢) $\vec{ر}$ = (٣، -١، ٠) + ك (١، -١، -١)

س٥

(١) ر = ٢

ص = ٣

ع = ٦

(٢) ($\frac{٢٧}{٥}$، $\frac{١٨}{٥}$، و $\frac{١٨\sqrt{٣}}{٥}$)